# 1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Welche Aussagen sind korrekt? Für eine reelle Folge $(a_n)$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt: Der Punkt $a$ ist Grenzwert von $(a_n)$, falls

   (a) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : \quad |a_n - a| < \varepsilon.$

   (b) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \quad |a_n - a| < \varepsilon.$

   (c) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \quad |a_n - a| < \varepsilon.$

   (d) [false] in jeder $\varepsilon$-Umgebung von $a$ unendlich viele Folgenglieder $a_n$ liegen.

2. *(Zum Begriff der Reihe.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Der Audruck $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet

   (a) [false] die Folge der Partialsummen, also $\left(\sum\limits_{l=0}^{k} a_l\right)_l$

   (b) [true] den Grenzwert $\lim\limits_{m\to\infty} s_m = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{m} a_n$, falls er existiert.

   (c) [false] die $n$-te Partialsumme $\sum\limits_{m=0}^{n} a_m$.

   (d) [true] den Reihenwert im Fall der Konvergenz.

3. *(Konvergenz von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $f : D \supseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a$ ein Berührpunkt von $D$ und $c \in \mathbb{R}$ oder $c = \pm\infty$. Es gilt $\lim_{x\to a} f(x) = c$, falls

   (a) [false] $f(a + \frac{1}{n}) \to c$ für $n \to \infty$.

   (b) [true] $\forall (x_n) \in D$ mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to c$.

   (c) [false] gilt: Ist $(x_n)$ Folge in $D$, dann gilt $x_n \to a$ und $f(x_n) \to c$.

   (d) [true] für jede Folge $(x_n)$ in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to a$ gilt, dass $f(x_n) \to c$.

4. (*Potenzen.*) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] $x^q = \sqrt[n]{x^m} \quad$ für $q = \dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$.

   (b) [true] $x^\alpha = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\alpha \text{ mal}} \quad$ für $\alpha \in \mathbb{N}$.

(c) [false] $x^\alpha = e^\alpha \cdot \log(x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) [true] $x^\alpha = e^{\log(x)\,\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. (*Lokale Maxima.*) Welche Aussagen sind korrekt? Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist $\xi \in \mathbb{R}$ ein lokales Maximum von $f$, falls

   (a) [true] $\xi$ ein globales Maximum ist.

   (b) [true] $\xi$ ein globales Maximum ist und $f'(x)0 =$ gilt.

   (c) [true] $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi) : f(\xi) \geq f(x)$.

   (d) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in U_\varepsilon(\xi) : f(\xi) \geq f(x)$.

6. (*Integrierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls
   ($\mathfrak{T}[a,b]$ bezeichnet den Raum der Treppenfunktionen auf $[a,b]$)

   (a) [false] Ober- und Unterintegral existieren.

   (b) [true] $f$ stetig und monoton ist.

   (c) [false] $\inf\left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \,\middle|\, \varphi \in \mathfrak{T}[a,b],\ f \leq \varphi \right\}$ und
   $\sup\left\{ \int_a^b \psi(t)dt \,\middle|\, \psi \in \mathfrak{T}[a,b],\ \psi \geq f \right\}$ existieren und gleich sind.

   (d) [false] $\sup\left\{ \int_a^b \psi(t)dt \,\middle|\, \psi \in \mathfrak{T}[a,b],\ \psi \leq f \right\}$
   $\leq \inf\left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \,\middle|\, \varphi \in \mathfrak{T}[a,b],\ f \leq \varphi \right\}$ gilt.

# 2 Sätze & Resultate

1. *(Folgen & Konvergenz, 1.)* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) [true] Eine Folge mit zwei verschiedenen Häufungswerten kann nicht konvergent sein.

   (b) [false] Gilt für zwei konvergente Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$, dass $a_n < b$, für alle $n$, dann auch $\lim a_n < \lim b_n$.

   (c) [true] Bestimmt divergente Folgen sind unbeschränkt.

   (d) [true] Kehrwerte von Nullfolgen mit positiven Gliedern konvergieren uneigentlich gegen $\infty$.

2. *(Intervallschachtelung.)* Wir betrachten die Intervalle $I_n = (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$ für $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Es gilt $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$.

   (b) [false] Wegen des Intervallschachtelungsprinzips gilt $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{0\}$.

   (c) [true] Es gilt $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{0\}$.

   (d) [false] Keine der anderen Aussagen ist korrekt.

3. *($b$-adische Entwicklungen.)* Wir betrachten eine Dezimalentwicklung der Form

$$\sum_{n=-2}^{\infty} a_n \, 10^{-n}$$

   mit Ziffern $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ $(-2 \leq n \in \mathbb{Z})$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Die Reihe konvergiert, weil das für jede $b$-adische Entwicklung so ist.

   (b) [false] Die Reihe konvergiert nur dann, falls alle späten Ziffern verschwinden, d.h. falls $\exists K \geq -2$ sodass $a_k = 0$ für alle $k \geq K$.

   (c) [true] Die Reihe konvergiert und für ihren Grenzwert $a$ gilt $a \leq 1000$.

   (d) [false] Im allgemeinen divergiert so eine Reihe.

4. *(Extremstellen.)* Wir betrachten eine beliebig oft differenzierbare Funktion

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}.$$

   Welche der Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] $f$ besitzt in jedem Fall ein globales Maximum.

   (b) [true] Hat $f$ ein Maximum in $x_0 \in (a, b)$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

   (c) [true] Falls in einem Punkt $x_0$ gilt, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat $f$ in $x_0$ ein lokales Minimum.

   (d) [false] Hat $f$ ein Maximum in $x_0 \in (a, b)$, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

5. *(Stetige Inverse.)* Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige & injektive Funktion auf dem Intervall $I$. Welche der Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $f(I)$ ist ein Intervall.

(b) [true] $f$ ist bijektiv als Funktion $f : I \to f(I)$ und daher existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$.

(c) [true] $f$ ist bijektiv als Funktion $f : I \to f(I)$ und daher existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ und $f^{-1}$ ist stetig.

(d) [false] Keine der anderen Aussagen ist korrekt.

6. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.* Welche Aussagen sind korrekt? Die erste Aussage des HsDI kann geschrieben werden als

   (a) [false] $\left(\int_a^b f(t)dt\right)' = f(x)$.

   (b) [true] $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

   (c) [true] $\frac{d}{dy}\int_a^y f(s)ds = f(y)$.

   (d) [false] $\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dt = f(x)$.

# 3 Beispiele & Gegenbeispiele

1. *(Grenzwerte.)* Gegeben ist eine reelle Folge $(x_n)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 17\,.$$

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\lim_{n\to\infty}(x_n + \frac{1}{n}) = 17$.

   (b) [false] $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}) = 18$.

   (c) [true] $\lim_{n\to\infty}(x_n - n) = -\infty$.

   (d) [true] $\lim_{n\to\infty}(x_n - 3x_n) = -34$.

2. *(Reihengrenzwerte.)* Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Welche der folgenden Rechnungen sind korrekt?

   (a) [true] $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} q^m q^{k-m} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} q^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,q^k$.

   (b) [false] $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty}(q^k \cdot q^k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} = \frac{1}{1-q^2}$.

(c) [false] Beide Rechnungen sind korrekt.

(d) [false] Keine der beiden Rechnungen ist korrekt.

3. *(Funktionsgrenzwerte.)* Gegeben sind die beiden reellen Funktionen $f$ und $g$ und es gelte

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Es gilt $\lim_{x\to\infty}\Big(f(x)g(x)\Big) = \lim_{x\to\infty} f(x)\,\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

   (b) [true] Falls zusätzlich $g$ beschränkt ist (d.h. $|g(x)| \le C$ für alle $x$), gilt $\lim_{x\to\infty}\Big(f(x)g(x)\Big) = 0$, denn $|f(x)g(x)| \le C|f(x)| \to 0$.

   (c) [false] Es gilt sicher $\lim_{x\to 0}\Big(f(x)g(x)\Big) \neq 0$.

   (d) [false] Man kann keine der anderen Aussagen folgern.

4. *(Funktionsgrenzwerte.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

   (b) [true] $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

   (c) [false] $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

   (d) [false] $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert, muss aber nicht $0$ sein.

5. *(Funktionseigenschaften.)* Welche der folgenden Implikationen gelten für eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ?$$

   (a) [false] $f$ stetig differenzierbar $\Longrightarrow$ $f$ stetig $\Longrightarrow$ $f$ beschränkt

   (b) [true] $f$ $2$-mal differenzierbar $\Longrightarrow$ $f$ stetig differenzierbar $\Longrightarrow$ $f$ stetig

   (c) [false] $f$ stetig differenzierbar $\Longrightarrow$ $f$ stetig $\Longrightarrow$ $f$ differenzierbar

   (d) [false] $f$ differenzierbar $\Longrightarrow$ $f$ stetig $\Longrightarrow$ $f$ stetig differenzierbar

6. *(Verschwindendes Integral)* Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind dann korrekt?

   (a) [false] Falls $f$ zusätzlich stetig ist, folgt aus $\int_a^b f = 0$, dass $f = 0$.

(b) [false] Aus $\int_a^b f = 0$ folgt $f = 0$.

(c) [true] Falls $f$ zusätzlich stetig ist, folgt aus $\int_a^b |f| = 0$, dass $f = 0$.

(d) [false] Aus $\int_a^b |f| = 0$ folgt $f = 0$.

# 4 Konkrete Beispiele

1. *(Nullfolge.)* Die Folge

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$$

ist eine Nullfolge. Aber welcher der folgenden Argumente sind korrekt?

(a) [true] $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$.

(b) [true] $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n} \to 0$

(c) [false] Für jedes $\varepsilon > 0$ kann in der Definition des Grenzwerts $N = \varepsilon^2$ gesetzt werden um zu erreichen, dass für alle $n \geq N$ gilt: $\dfrac{1}{n^2} \leq \varepsilon$.

(d) [true] $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ist eine Teilfolge von $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ und daher ebenfalls eine Nullfolge.

2. *(Reihenkonvergenz.)* Welche der folgenden Aussagen zur Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

sind korrekt?

(a) [true] Sie divergiert, weil $\sum \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante ist.

(b) [false] Sie konvergiert, weil $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

(c) [false] Sie konvergiert nach Quotiententest, denn $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$.

(d) [false] Sie divergiert weil $\sum \frac{1}{n}$ divergiert und $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum \frac{1}{n}}$.

3. *(Stetigkeit aus der Definition.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Die Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = x^2$$

im Punkt $x_0 = 0$ folgt aus dem $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium da wir

(a) [false] zu $\delta > 0$ beliebig gegeben, $\varepsilon = \delta^2$ wählen können.
(b) [false] zu $\delta > 0$ beliebig gegeben, $\varepsilon = \sqrt{\delta}$ wählen können.
(c) [false] zu $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, $\delta = \varepsilon^2$ wählen können.
(d) [true] zu $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ wählen können.

4. *(Differenzierbarkeit.)* Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (|x| - 1)^2 .$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] $f$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, weil das Quadrat des Betrags $|x|^2 = x^2$ differenzierbar ist.
(b) [true] $f$ ist in $\xi = 0$ nicht differenzierbar weil $|x|$ dort nicht differenzierbar ist.
(c) [false] $f$ ist in $\xi_\pm = \pm 1$ nicht differenzierbar.
(d) [false] $f$ ist überall differenzierbar, aber $f'$ ist in $\xi = 0$ nicht stetig.

5. *(Maxima.)* Welche der Aussagen sind korrekt? Die Funktion

$$f : [-2, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x$$

hat

(a) [true] zwei lokale Maxima.
(b) [true] zwei globale Maxima.
(c) [false] ein lokales Maximum in $x_0 = -1$ und ein globales Maximum in $x_1 = 2$, das aber kein lokales Minimum ist.
(d) [false] kein globales Minimum.

6. *(Uneigentliche Integrale.)* Welche der folgenden Aussagen über uneigentliche Integrale sind korrekt?

(a) [true] $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$.
(b) [false] $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ konvergiert.

(c) [true] $\int\limits_0^1 \frac{1}{x} dx$ divergiert.

(d) [false] $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x} dx$ konvergiert.

2021-01-31

# Ausarbeitung 4. Termin

[1] (a)(i) $b_n \le a_n \Rightarrow \lim b_n \le \lim a_n$

(1) Wir sehen $c_n = a_n - b_n$; damit ist $c_n$ nicht negativ und wegen der Grenzwertsätze auch konvergent mit $\lim c_n = \lim a_n - \lim b_n$; es bleibt zz dass $\lim c_n \ge 0$.

(2) Sei indirekt $c = \lim c_n < 0$. Wir verwenden einen Trick und die Def des Grenzwerts: Sei $\varepsilon = -c > 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon)\ \forall n \ge N(\varepsilon)$:

$$|c_n - c| < \varepsilon \Rightarrow |c_n + \varepsilon| < \varepsilon \Rightarrow c_n + \varepsilon < \varepsilon \Rightarrow c_n < 0 \ \lightning$$

$c_n, \varepsilon \ge 0$

(ii) Eine entsprechende Aussage für $<$ würde lauten:

$b_n < a_n$ für fast alle $n \Rightarrow \lim b_n < \lim a_n$.

Diese Aussage ist falsch, denn sei $b_n = 1/n$, $a_n = 0$, dann gilt $b_n > a_n\ \forall n$ aber $\lim b_n = 0 = \lim a_n$

(b) (i) Nein; ein Gegenbsp ist $I_n = (-\frac{1}{n}, 0)$ denn hier ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} I_n = \emptyset$ [kein $a > 0$ kann in $\bigcap I_n$ sein denn $1/n \to 0 \Rightarrow 1/n < a$ für späte $n$]

[1] (b)(ii) Beweis des IP: Seien $I_n=[a_n,b_n]$

(1) Die Folge der linken Randpunkte $a_n$ ist eine Cauchyfolge:

Weil die Durchmesser der Intervalle $\mathrm{diam}(I_n)\to 0$ (Voraussetzung)

gilt für beliebiges $\varepsilon>0$: $\exists N$: $\mathrm{diam}(I_n)<\varepsilon \ \forall n\geq N$

Seien nun $a_k, a_l$ mit $k,l>N \Rightarrow a_k, a_l \in I_N$

und daher $|a_k-a_l|<\mathrm{diam}(I_N)<\varepsilon$

Vollständigkeit

(2) Cauchy-Prinzip $\Rightarrow \exists \lim a_n =: a$

Kandidat für Pkt im Schnitt aller Intervalle

(3) $a$ liegt in allen $I_n$.

Fixiere wir $k$ und schauen $n>k$ an,

dann sind die Randpunkte wie folgt geordnet

$$\begin{array}{ccccccc} a_k & \leq & a_n & \leq & b_n & \leq & b_k \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ a_k & & a & & & & b_k \end{array}$$

konstante Folge in $n$

Grenzwertvgl. Folge $\Longrightarrow a_k \leq a \leq b_k$

Hier geht ein, dass $I_k$ abg. (+)

Das Prozedere können wir für jedes $k$ durchführen. $\Rightarrow a\in I_k \ \forall k$

(E) $a$ ist eindeutig wegen $\mathrm{diam}(I_n)\to 0$: Denn ist $\exists a,b\in\bigcap I_n$

dann gilt: $|a-b|\leq \mathrm{diam}(I_n)\to 0$. Also gilt

$|a-b|<\varepsilon \ \forall\varepsilon>0$ und daher $|a-b|=0 \Longrightarrow a=b$ ∎

Eig. des Betrags.

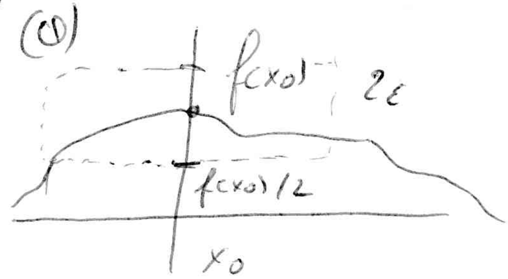
---

(+) Hier geht die Abgeschlossenheit der $I_n$ ein: Für offene Intervalle

$I_n=(a_n,b_n)$ würde $a_k\leq a$ (oder $a\leq b_k$) $\forall k$ im Falle der

Gleichheit nicht implizieren, dass $a\in I_k$!

2 (a)




Wenn $f(x_0) > 0$ ist, dann sind für Punkte nahe $x_0$ die Funktionswerte nahe bei $f(x_0)$ also z.B. größer als $f(x_0)/2$ $(>0!)$. Daher gibt es eine ganze Umgebung von $x_0$ auf der $f(x) > f(x_0)/2 > 0$ ist.

(b) (i) Die Operationen sind durch die Operationen in der Zielmenge $\mathbb{R}$ definiert:

$$\underset{\pm \text{ für Funktionen}}{(f\pm g)}(x) := f(x) \underset{\pm \text{ im Zielraum } \mathbb{R}}{\pm} g(x) \;; \quad \underset{\text{Produkt } \lambda\cdot \text{ für Fkt}}{(\lambda\cdot f)}(x) := \lambda \underset{\cdot \text{ in } \mathbb{R}}{\cdot} f(x)$$

$$\underset{\text{Produkt für Fkt}}{(f\cdot g)}(x) := f(x) \underset{\text{Produkt in } \mathbb{R}}{\cdot} g(x)$$

(ii) Das funktioniert mit der Folgenstetigkeit & den Grenzwertsätzen;

Zz: $\lim (f\pm g)(x_n) = (f\pm g) \lim (x_n)$

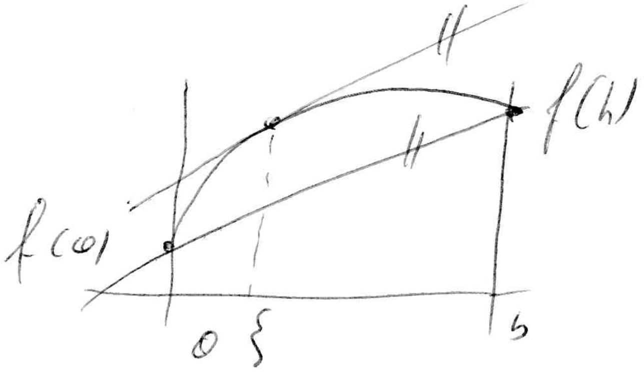
Das geht nun ganz einfach:

$$\lim((f\pm g)(x_n)) \underset{\text{Def } +}{=} \lim(f(x_n)\pm g(x_n)) \overset{\text{Grenzwertsatz}}{=} \lim f(x_n) \pm \lim g(x_n)$$

$$\underset{f,g \text{ stetig}}{=} f(\lim x_n) \pm g(\lim x_n) \underset{\text{Def } +}{=} (f+g)(\lim x_n)$$

**3** (a) Der Mittelwertsatz besagt, dass für eine Fkt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $f$ stetig auf $[a,b]$ & diffbar auf dem Inneren $(a,b)$ es einen Punkt $\xi\in(a,b)$ gibt an dem die Tangente $f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)$ parallel zur Sekante ist

Die Vollständigkeit geht im Beweis des Satzes von Rolle ein, denn es wird der Satz vom Maximum verwendet; diese beruht auf dem Satz von Bolzano-Weierstraß, der äquivalent zu Vollständigkeit ist




(b) Für eine glatte (= beliebig oft diffbare Fkt) $f$ ist die Taylorreihe definiert als der Ausdruck

$$T[f,x_0](x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Dabei ist $x_0$ ein fixer Punkt und die Reihe hat als Koeffizienten alle Ableitungen von $f$ in diesem Punkt.

Die Taylorreihe konvergiert gegen die Funktion selbst genau dann, wenn das Restglied $R_n(x)\to 0$ $(n\to\infty)$, wobei

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Hier ist $\xi$ ein Punkt zwischen $x$ und $x_0$.