

NAME:		MAT.NR.	
-------	--	---------	--

Prüfung zu

Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2022, 2. Termin, 28.9.2022

Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 24 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die „**Bepunktung**“ ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie $1/(\text{Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage})$ Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten $1/2$ Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird $1/(\text{Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage})$ Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkte pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 24 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen.**

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 24 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	∑	Note
(24)	(8)	(8)	(8)	(24)	(48)	

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

- (Zur Grenzwertdefinition.) Welche Aussagen sind korrekt?
Für eine reelle Folge (a_n) und ein $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, falls

 - in einer ε -Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen.
 - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N$.
 - außerhalb jeder ε -Umgebung von a nur endlich viele Folgenglieder a_n liegen.
 - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$.
- (Beschränkte Folgen.) Welche Aussagen sind korrekt?
Eine reelle Folge (a_n) ist beschränkt, falls

 - $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists C > 0 : |a_n| \leq C$.
 - $\exists C > 0 : |a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 - $\exists C > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C \quad \forall n \geq N$.
 - $\exists C > 0 : a_n \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- (Zum Reihenbegriff.) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Welche Aussagen sind korrekt?

 - Mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ wird sowohl die Reihe selbst (also die Folge der Partialsummen) bezeichnet, als auch — im Fall der Konvergenz — ihr Limes (also der Reihenwert).
 - Falls alle $a_n > 0$ sind, dann divergiert die Reihe $\sum a_n$.
 - Falls $a_n \rightarrow 0$, dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$.
 - Der Limes einer konvergenten Reihe ändert sich nicht, falls man endlich viele Glieder weglässt.
- (Stetigkeit.) Welche Aussagen sind korrekt? Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in \mathbb{R}$, falls

 - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ für jede reelle Folge mit $x_n \rightarrow a$.
 - $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
 - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(x) \in U_\delta(f(a))$ für alle $x \in U_\varepsilon(a)$.

5. (Potenzen.) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Welche Aussagen sind korrekt?

(a) $x^q = \sqrt[q]{x^m}$ für $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$.

(b) $x^\alpha = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\alpha \text{ mal}}$ für $\alpha \in \mathbb{N}$.

(c) $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$ für $\alpha \in \mathbb{Q}$.

(d) $x^\alpha = \exp(x \log(\alpha))$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. (Differenzierbarkeit.) Welche Aussagen für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und einen Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ sind korrekt?

(a) Falls f in ξ differenzierbar ist, dann ist die Ableitung $f'(\xi)$ gleich dem Limes des Differenzialquotienten (für $\xi \neq x \rightarrow \xi$).

(b) Falls der links- und der rechtsseitige Limes des Differenzenquotienten (für $x \rightarrow \xi$) existieren und übereinstimmen, dann ist f in ξ differenzierbar.

(c) Falls f auf $\mathbb{R} \setminus \{\xi\}$ differenzierbar ist und die beiden einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \searrow \xi} f'(x)$ und $\lim_{x \nearrow \xi} f'(x)$ existieren und übereinstimmen, dann ist f in ξ auch differenzierbar.

(d) Ist f in ξ differenzierbar, so berührt die Tangente den Graphen im Punkt $(\xi, f(\xi))$, aber sonst in keinem weiteren Punkt.

7. (Lokale Maxima.) Welche Aussagen sind korrekt? Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $\xi = 0$ ein lokales Maximum, falls

(a) es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass die Funktionswerte aller $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Ungleichung $f(x) < f(\xi)$ erfüllen.

(b) $f'(\xi) = 0$ gilt.

(c) es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass f monoton fallend auf $(-\varepsilon, 0)$ und monoton wachsend auf $(0, \varepsilon)$ ist.

(d) f konstant auf einer ε -Umgebung von 0 ist.

8. (*Integrierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls ($\mathfrak{T}[a, b]$ bezeichnet den Raum der Treppenfunktionen auf $[a, b]$)

(a) $\inf \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathfrak{T}[a, b], f \leq \varphi \right\} > \sup \left\{ \int_a^b \psi(t) dt \mid \psi \in \mathfrak{T}[a, b], \psi \leq f \right\}$

(b) Ober- und Unterintegral existieren.

(c) f eine beschränkte Funktion ist.

(d) $\inf \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathfrak{T}[a, b], f \leq \varphi \right\} = \sup \left\{ \int_a^b \psi(t) dt \mid \psi \in \mathfrak{T}[a, b], \psi \leq f \right\}$

2 Sätze & Resultate

9. (*Folgen: Grenzwert vs. Häufungswert.*) Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

(a) Wenn eine Folge genau einen Häufungswert hat, dann konvergiert sie.

(b) Jede konvergente Folge hat einen Häufungswert.

(c) Jede konvergente Folge hat genau einen Häufungswert.

(d) Wenn eine Folge einen Häufungswert hat, dann ist sie beschränkt.

10. (*Grenzwertsätze strukturell.*) Welche der folgenden Aussagen über reelle Folgen und deren Konvergenz sind korrekt?

(a) Das Sandwich-Lemma besagt, dass die Konvergenz reeller Folgen die \leq -Relation erhält.

(b) Linearkombinationen konvergenter Folgen konvergieren gegen die Linearkombination der Grenzwerte.

(c) Quotienten konvergenter Folgen sind wieder konvergent und zwar gegen den Quotienten der Grenzwerte.

(d) Das Sandwich-Lemma besagt, dass die Konvergenz reeller Folgen die $<$ -Relation erhält.

11. (*Konvergenzprinzipien.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
- (a) Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende Folge ist konvergent.
 - (b) Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende Folge ist beschränkt.
 - (c) Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende Folge (a_n) konvergiert gegen das Supremum der Menge der Folgenglieder, also gegen $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
 - (d) Jede beschränkte Folge konvergiert.
12. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind korrekt?
- (a) Ist f gleichmäßig stetig, dann ist f auch stetig.
 - (b) Ist f stetig, dann ist f auch beschränkt.
 - (c) Ist f stetig, dann besitzt f einen Fixpunkt (d.h. es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$).
 - (d) Ist f stetig und es gilt $f(0) \geq 0$, dann gibt es ein Intervall $U = (-\delta, \delta)$ (mit einem $\delta > 0$) sodass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in U$.
13. (*Eigenschaften differenzierbarer Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen über differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind korrekt?
- (a) Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f streng monoton wachsend auf ganz \mathbb{R} .
 - (b) Falls f streng monoton wachsend auf \mathbb{R} ist, dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
 - (c) Falls $f'(x_0) = 0$ gilt, dann hat f in x_0 ein Extremum.
 - (d) Falls f im Punkt x_0 ein Extremum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$.
14. (*Exponentialfunktion und Logarithmus.*) Welche Aussagen sind korrekt?
- (a) \exp ist streng monoton wachsend und daher ist auch \log als Umkehrfunktion von \exp streng monoton wachsend.
 - (b) \log erfüllt die Funktionalgleichung $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ ($x, y \in (0, \infty)$).
 - (c) $\log(x^k) = k \log(x)$ ($\mathbb{R} \ni x > 0, k \in \mathbb{N}$).
 - (d) $\log(1+x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$ ($-1 < x \leq 1$).

15. (*Differenzierbare & integrierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind korrekt? (Mit integrierbar ist immer Riemann-integrierbar gemeint.)
- (a) Ist f differenzierbar, dann ist f auch integrierbar.
 - (b) Ist f stetig und differenzierbar, dann ist f auch stetig differenzierbar.
 - (c) Ist f monoton, dann ist f auch integrierbar.
 - (d) Treppenfunktionen sind differenzierbar.
16. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind korrekt?
- (a) Ist f stetig, dann ist jede Stammfunktion von f stetig differenzierbar.
 - (b) Ist f integrierbar, dann gilt $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.
 - (c) Ist f stetig, dann gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist.
 - (d) Ist f stetig, dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f .

3 Beispiele & Gegenbeispiele

17. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?
- (a) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ ist als konvergente Folge beschränkt.
 - (b) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ ist als Quadrat der Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ selbst eine Nullfolge.
 - (c) Für jede Nullfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und jede bestimmt divergente Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n \rightarrow \infty$ gilt $a_n b_n \rightarrow \infty$.
 - (d) Für jede Nullfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und jede konvergente Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n \rightarrow b$ gilt $a_n + b_n \rightarrow b$.

18. (Konvergenz von Reihen.) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert nach dem Wurzeltest.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, weil $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ eine Nullfolge ist.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium.

19. (Winkelfunktionen.) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) sin und cos sind beschränkt.
- (b) tan ist beschränkt.
- (c) arcsin ist beschränkt.
- (d) arctan ist monoton fallend.

20. (Funktionseigenschaften.) Welche der Aussagen trifft auf die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{zu?}$$

- (a) f ist beschränkt.
- (b) f ist als Umkehrfunktion der monoton wachsenden, stetigen Funktion $g(x) = x^3$ ($x \in \mathbb{R}$) nach dem Umkehrsatz stetig und monoton wachsend.
- (c) f ist als Umkehrfunktion der monoton wachsenden, differenzierbaren Funktion $g(x) = x^3$ ($x \in \mathbb{R}$) differenzierbar.
- (d) f ist auf $[0, 1]$ integrierbar.

21. (*Funktionseigenschaften, 2.*) Welche der Aussagen trifft auf die sogenannte Sprungfunktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{zu?}$$

- (a) f ist beschränkt.
 - (b) f ist in $x_0 = 0$ unstetig, überall sonst stetig.
 - (c) f ist überall differenzierbar und es gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
 - (d) f ist monoton wachsend.
22. (*Funktionsgrenzwerte.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^x = \infty$ für ein fixes $k \in \mathbb{N}$.
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$ ($\mathbb{R} \ni \alpha > 0$).
 - (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \infty$
 - (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^x = 0$
23. (*Stetige und differenzierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 5x - 8$ ist stetig differenzierbar.
 - (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ differenzierbar und daher dort auch stetig.
 - (c) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist im Punkt $x_0 = 0$ unstetig.
 - (d) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf ganz \mathbb{R} differenzierbar.
24. (*Differenzierbare und integrierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
- (a) Jedes Polynom ist auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ integrierbar.
 - (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$ ist auf $[-1, 1]$ integrierbar
 - (c) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $[0, 1]$ Riemann-integrierbar.
 - (d) Es gilt $\int_0^1 \frac{1}{x} < \infty$.

Teil 2: Offene Aufgaben

1. Folgen, Reihen & Konvergenz

- (a) (*Cauchyfolgen.*) Definieren Sie (exakt) den Begriff einer *Cauchyfolge* und geben Sie ein Beispiel einer Cauchyfolge an. (2 Pkte)
- (b) (*Sandwich-Lemma.*) Formulieren Sie das Sandwich-Lemma und beweisen Sie es. (4 Pkte)
- (c) (*Intervallschachtelungsprinzip.*) Formulieren Sie die Aussage des Intervallschachtelungsprinzips in eigenen Worten ohne die Verwendung von Formeln. (2 Pkte)

2. Stetige und differenzierbare Funktionen

- (a) (*Polynome sind stetig.*) Erklären Sie kurz und in Worten, warum Polynome (auf ihrem gesamten Definitionsbereich) stetige Funktionen sind. (1 Pkt)
- (b) (*Stetige und differenzierbare Funktionen.*) Geben Sie explizit (formal oder durch Zeichnen des Graphen) jeweils eine Funktion auf dem Intervall $[-1, 1]$ mit den geforderten Eigenschaften an (je 1 Pkt):
 - (i) Eine stetige Funktion, die in genau zwei Punkten nicht differenzierbar ist.
 - (ii) Eine Funktion mit genau einer Sprungstelle, die an genau einer weiteren Stelle nicht differenzierbar ist.
- (c) (*Satz von Rolle.*) Formulieren Sie (exakt) den Satz von Rolle (2 Pkte) und erläutern Sie kurz die wesentlichen Beweisschritte. Erklären Sie dabei, wo die Voraussetzungen des Satzes in den Beweis eingehen. (3 Pkte)

3. Differenzieren & Integrieren

- (a) (*Mittelwertsatz der Integralrechnung.*) Formulieren Sie anschaulich die Aussage des (einfacheren Teils des) Mittelwertsatzes der Integralrechnung und erläutern Sie diese anhand einer Skizze. (4 Pkte)
- (b) (*Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.*) Formulieren Sie (exakt) den zweiten Teil des Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. (1 Pkt)
- (c) (*Partielle Integration.*) Leiten Sie die Regel zur partiellen Integration aus der Produktregel der Differenzialrechnung her. (3 Pkte)