Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2022, 2. Termin, 28.9.2022, Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Für eine reelle Folge (a_n) und ein $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls
   (a) [false] in einer ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen.
   (b) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N.$
   (c) [true] außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele Folgenglieder a_n liegen.
   (d) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$
2. (*Beschränkte Folgen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine reelle Folge (a_n) ist beschränkt, falls
   (a) [false] $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists C > 0\colon \quad |a_n| \leq C.$
   (b) [true] $\exists C > 0: \quad |a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
   (c) [true] $\exists C > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\colon \quad |a_n| \leq C \quad \forall n \geq N.$
   (d) [false] $\exists C > 0: \quad a_n \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
3. (*Zum Reihenbegriff.*) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] Mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ wird sowohl die Reihe selbst (also die Folge der Partialsummen) bezeichnet, als auch — im Fall der Konvergenz — ihr Limes (also der Reihenwert).
   (b) [false] Falls alle $a_n > 0$ sind, dann divergiert die Reihe $\sum a_n$.
   (c) [false] Falls $a_n \to 0$, dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$.
   (d) [false] Der Limes einer konvergenten Reihe ändert sich nicht, falls man endlich viele Glieder weglässt.
4. *(Stetigkeit.)* Welche Aussagen sind korrekt? Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in \mathbb{R}$, falls
   (a) [true] $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}: \; |x - a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$
   (b) [true] $\lim_{n\to\infty} \big(f(x_n)\big) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ für jede reelle Folge mit $x_n \to a$.
   (c) [false] $\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}: \; |x - a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$
   (d) [false] $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: f(x) \in U_\delta(f(a))$ für alle $x \in U_\varepsilon(a)$.
5. (*Potenzen.*) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] $x^q = \sqrt[n]{x^m} \quad$ für $q = \dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$.
   (b) [true] $x^\alpha = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{\alpha \text{ mal}} \quad$ für $\alpha \in \mathbb{N}$.
   (c) [true] $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x)) \quad$ für $\alpha \in \mathbb{Q}$.
   (d) [false] $x^\alpha = \exp(x \log(\alpha)) \quad$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.
6. (*Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ sind korrekt?
   (a) [false] Falls f in ξ differenzierbar ist, dann ist die Ableitung $f(\xi)$ gleich dem Limes des Differenzialquotienten (für $\xi \neq x \to \xi$).
   (b) [true] Falls der links- und der rechtsseitige Limes des Differenzenquotienten (für $x \to \xi$) existieren und übereinstimmen, dann ist f in ξ differenzierbar.
   (c) [false] Falls f auf $\mathbb{R} \setminus \{\xi\}$ differenzierbar ist und die beiden einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\searrow\xi} f'(x)$ und $\lim_{x\nearrow\xi} f'(x)$ existieren und übereinstimmen, dann ist f in ξ auch differenzierbar.
   (d) [false] Ist f in ξ differenzierbar, so berührt die Tangente den Graphen im Punkt $(\xi, f(\xi))$, aber sonst in keinem weiteren Punkt.

7. (*Lokale Maxima.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat in $\xi = 0$ ein lokales Maximum, falls

   (a) [true] es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass die Funktionswerte aller $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Ungleichung $f(x) < f(\xi)$ erfüllen.

   (b) [false] $f'(\xi) = 0$ gilt.

   (c) [false] es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass f monoton fallend auf $(-\varepsilon, 0)$ und monoton wachsend auf $(0, \varepsilon)$ ist.

   (d) [true] f konstant auf einer ε-Umgebung von 0 ist.

8. (*Integrierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls
   ($\mathfrak{T}[a, b]$ bezeichnet den Raum der Treppenfunktionen auf $[a, b]$)

   (a) [false] $\inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \,\middle|\, \varphi \in \mathfrak{T}[a, b],\, f \leq \varphi \right\} > \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)dt \,\middle|\, \psi \in \mathfrak{T}[a, b],\, \psi \leq f \right\}$

   (b) [false] Ober- und Unterintegral existieren.

   (c) [false] f eine beschränkte Funktion ist.

   (d) [true] $\inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \,\middle|\, \varphi \in \mathfrak{T}[a, b],\, f \leq \varphi \right\} = \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)dt \,\middle|\, \psi \in \mathfrak{T}[a, b],\, \psi \leq f \right\}$

2 Sätze & Resultate

1. *(Folgen: Grenzwert vs. Häufungswert).* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) [false] Wenn eine Folge genau einen Häufungswert hat, dann konvergiert sie.

   (b) [true] Jede konvergente Folge hat einen Häufungswert.termin

   (c) [true] Jede konvergente Folge hat genau einen Häufungswert.

   (d) [false] Wenn eine Folge einen Häufungswert hat, dann ist sie beschränkt.

2. *(Grenzwertsätze strukturell).* Welche der folgenden Aussagen über reelle Folgen und deren Konvergenz sind korrekt?

   (a) [true] Das Sandwich-Lemma besagt, dass die Konvergenz reeller Folgen die $\leq$-Relation erhält.

   (b) [true] Linearkombinationen konvergenter Folgen konvergieren gegen die Linearkombination der Grenzwerte.

   (c) [false] Quotienten konvergenter Folgen sind wieder konvergent und zwar gegen den Quotienten der Grenzwerte.

   (d) [false] Das Sandwich-Lemma besagt, dass die Konvergenz reeller Folgen die $<$-Relation erhält.

3. (*Konvergenzprinzipien.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende Folge ist konvergent.

   (b) [true] Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende Folge ist beschränkt.

   (c) [true] Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende Folge (a_n) konvergiert gegen das Supremum der Menge der Folgenglieder, also gegen $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

   (d) [false] Jede beschränkte Folge konvergiert.

4. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [true] Ist f gleichmäßig stetig, dann ist f auch stetig.

   (b) [false] Ist f stetig, dann ist f auch beschränkt.

   (c) [false] Ist f stetig, dann besitzt f einen Fixpunkt (d.h. es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$).

   (d) [false] Ist f stetig und es gilt $f(0) \geq 0$, dann gibt es ein Intervall $U = (-\delta, \delta)$ (mit einem $\delta > 0$) sodass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in U$.

5. (*Eigenschaften differenzierbarer Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen über differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [true] Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.

   (b) [true] Falls f streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist, dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (c) [false] Falls $f'(x_0) = 0$ gilt, dann hat f in x_0 ein Extremum.

   (d) [true] Falls f im Punkt x_0 ein Extremum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

6. (*Exponentialfunktion und Logarithmus.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\exp$ ist streng monoton wachsend und daher ist auch $\log$ als Umkehrfunktion von $\exp$ streng monoton wachsend.

   (b) [true] $\log$ erfüllt die Funktionalgleichung $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ $(x, y \in (0, \infty))$.

   (c) [true] $\log(x^k) = k \log(x)$ $(\mathbb{R} \ni x > 0,\, k \in \mathbb{N})$.

   (d) [false] $\log(1 + x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$ $(-1 < x \leq 1)$.

7. (*Differenzierbare & integrierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind korrekt? (Mit integrierbar ist immer Riemann-integrierbar gemeint.)

   (a) [true] Ist f differenzierbar, dann ist f auch integrierbar.

   (b) [false] Ist f stetig und differenzierbar, dann ist f auch stetig differenzierbar.

   (c) [true] Ist f monoton, dann ist f auch integrierbar.

   (d) [false] Treppenfunktionen sind differenzierbar.

8. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [true] Ist f stetig, dann ist jede Stammfunktion von f stetig differenzierbar.

   (b) [false] Ist f integrierbar, dann gilt $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.

   (c) [true] Ist f stetig, dann gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist.

   (d) [false] Ist f stetig, dann ist $F(x) = \int_a^t f(x)dx$ eine Stammfunktion von f.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

1. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) [true] $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ ist als konvergente Folge beschränkt.

   (b) [true] $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ ist als Quadrat der Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ selbst eine Nullfolge.

   (c) [false] Für jede Nullfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und jede bestimmt divergente Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n \to \infty$ gilt $a_n b_n \to \infty$.

   (d) [true] Für jede Nullfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und jede konvergente Folge $(b_n)_{\in \mathbb{N}}$ mit $b_n \to b$ gilt $a_n + b_n \to b$.

2. (*Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert nach dem Wurzeltest.

   (b) [false] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, weil $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ eine Nullfolge ist.

   (c) [true] $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

(d) [true] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty$ konvergiert nach dem Leibnitz-Kriterium.

3. *(Winkelfunktionen).* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\sin$ und $\cos$ sind beschränkt.

   (b) [false] $\tan$ ist beschränkt.

   (c) [true] $\arcsin$ ist beschränkt.

   (d) [false] $\arctan$ ist monoton fallend.

4. (*Funktionseigenschaften.*) Welche der Aussagen trifft auf die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{zu?}$$

   (a) [false] f ist beschränkt.

   (b) [true] f ist als Umkehrfunktion der monoton wachsenden, stetigen Funktion $g(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ nach dem Umkehrsatz stetig und monoton wachsend.

   (c) [false] f ist als Umkehrfunktion der monoton wachsenden, differenzierbaren Funktion $g(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ differenzierbar.

   (d) [true] f ist auf $[0, 1]$ integrierbar.

5. (*Funktionseigenschaften, 2.*) Welche der Aussagen trifft auf die sogenannte Sprungfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{zu?}$$

   (a) [true] f ist beschränkt.

   (b) [true] f ist in $x_0 = 0$ unstetig, überall sonst stetig.

   (c) [false] f ist überall differenzierbar und es gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (d) [true] f ist monoton wachsend.

6. (*Funktionsgrenzwerte.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\lim_{x\to\infty} x^k e^x = \infty$ für ein fixes $k \in \mathbb{N}$.

   (b) [true] $\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$ $(\mathbb{R} \ni \alpha > 0)$.

   (c) [false] $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \infty$

   (d) [false] $\lim_{x\to\infty} x^2 e^x = 0$

7. (*Stetige und differenzierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 5x - 8$ ist stetig differenzierbar.

   (b) [false] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ differenzierbar und daher dort auch stetig.

   (c) [false] Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist im Punkt $x_0 = 0$ unstetig.

   (d) [false] Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

8. (*Differenzierbare und integrierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Jedes Polynom ist auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ integrierbar.

   (b) [true] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$ ist auf $[-1, 1]$ integrierbar

   (c) [false] Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $[0, 1]$ Riemann-integrierbar.

   (d) [false] Es gilt $\int_0^1 \frac{1}{x} < \infty$.

Teil 2: Offene Aufgaben

1. *Folgen, Reihen & Konvergenz*

   (a) (*Cauchyfolgen.*) Definieren Sie (exakt) den Begriff einer *Cauchyfolge* und geben Sie ein Beispiel einer Cauchyfolge an. (2 Pkte)

   (b) (*Sandwich-Lemma.*) Formulieren Sie das Sandwich-Lemma und beweisen Sie es. (4 Pkte)

   (c) (*Intervallschachtelungsprinzip.*) Formulieren Sie die Aussage des Intervallschachtelungsprinzips in eigenen Worten ohne die Verwendung von Formeln. (2 Pkte)

2. *Stetige und differenzierbare Funktionen*

   (a) (*Polynome sind stetig.*) Erklären Sie kurz und in Worten, warum Polynome (auf ihrem gesamten Definitionsbereich) stetige Funktionen sind. (1 Pkt)

   (b) (*Stetige und differenzierbare Funktionen.*) Geben Sie explizit (formal oder durch Zeichnen des Graphen) jeweils eine Funktion auf dem Intervall $[-1, 1]$ mit den geforderten Eigenschaften an (je 1 Pkt):

      (i) Eine stetige Funktion, die in genau zwei Punkten nicht differenzierbar ist.

      (ii) Eine Funktion mit genau einer Sprungstelle, die an genau einer weiteren Stelle nicht differenzierbar ist.

   (c) (*Satz von Rolle.*) Formulieren Sie (exakt) den Satz von Rolle (2 Pkte) und erläutern Sie kurz die wesentlichen Beweisschritte. Erklären Sie dabei, wo die Voraussetzungen des Satzes in den Beweis eingehen. (3 Pkte)

3. *Differenzieren & Integrieren*

   (a) (*Mittelwertsatz der Integralrechnung.*) Formulieren Sie anschaulich die Aussage des (einfacheren Teils des) Mittelwertsatzes der Integralrechnung und erläutern Sie diese anhand einer Skizze. (4 Pkte)

   (b) (*Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.*) Formulieren Sie (exakt) den zweiten Teil des Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. (1 Pkt)

   (c) (*Partielle Integration.*) Leiten Sie die Regel zur partiellen Integration aus der Produktregel der Differenzialrechnung her. (3 Pkte)

Teil 2: Offene Aufgaben

1 (a) Cauchyfolgen: Eine reelle Folge $(a_n)_n$ heißt Cauchy Folge, falls

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n\ge N: |a_n-a_m|<\varepsilon.$$

Bsp: Jede konvergente Folge, zB $1/n$ ($\to 0$)

[Interessanter eine CF in $\mathbb{Q}$, die nicht in $\mathbb{Q}$ konvergiert, zB $x_0>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{3}{x_n}\right)$; $x_n\in\mathbb{Q}$, $x_n\to\sqrt{3}$.]

(b) (Sandwich-Lemma) Seien $(a_n),(b_n),(c_n)$ reelle Folgen mit (1) $a_n\to a$, $c_n\to a$, und (2) $\exists n_0\in\mathbb{N}: a_n\le b_n\le c_n\ \forall n\ge n_0$. Dann gilt auch $b_n\to a$.

Beweis: Wir zeigen $b_n\to a$. Sei also $\varepsilon>0$ beliebig

$$\xRightarrow[c_n\to a]{a_n\to a} \exists N_0\in\mathbb{N}: |a_n-a|<\varepsilon,\ |c_n-a|<\varepsilon$$

Daher gilt $\forall n\ge N:=\max(n_0,N_0)$:

$$a-\varepsilon<a_n\le b_n\le c_n<a+\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<b_n-a<\varepsilon.$$

Also gilt $\forall n\ge N: |b_n-a|<\varepsilon$, also $b_n\to a$. □

(c) (Intervallschachtelungsprinzip). Der Durchschnitt über eine Folge abgeschlossener, ineinander geschachtelter Intervalle, deren Durchmesser gegen Null geht, enthält genau einen Punkt.

2 (a) (Polynome sind stetig) Polynome sind als endliche Summen von endlichen Produkten von Konstanten mit der Identität Id stetig.

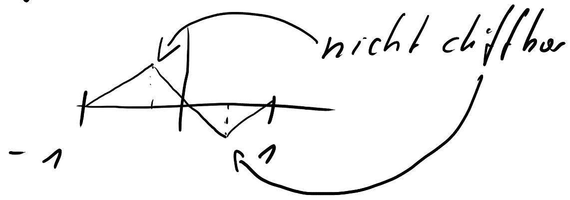
endl. Summe

[z.B. $p(x)=3x^2+4x=\left[(3\cdot Id\cdot Id)+(4\cdot Id)\right](x)$]

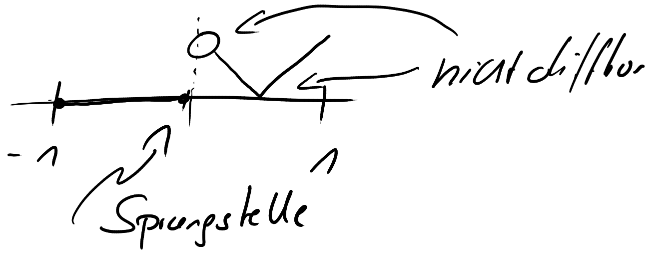
endl. Produkt

2 (b) (Stetige & differenzierbare Funktionen)

(i)



(ii)



(c) (Satz v. Rolle) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf dem Inneren (a,b). Falls $f(a)=f(b)$, dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi)=0$.

Beweis: (1) Es gibt o.B.d.A ein x mit $f(x) > f(a) (=f(b))$:

Angenommen f konstant, dann ist das Resultat klar; falls nicht $\exists x$ mit $f(x) \neq f(a)$; oBdA sei also $f(x) > f(a)$.

(2) f hat als stetige Fkt auf dem abg Intervall $[a,b]$ nach dem Satz vom Maximum ein Maximum, d.h. $\exists \xi \in [a,b]: f(\xi) \geq f(x) \; \forall x \in [a,b]$ $(*)$

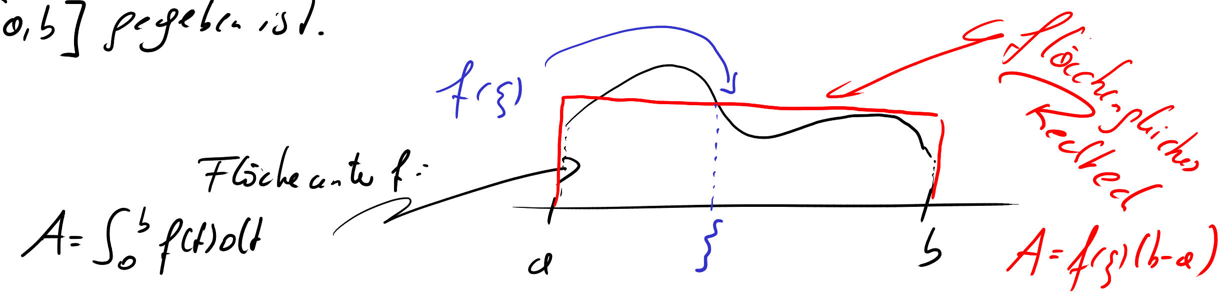
Voraus. f stetig auf $[a,b]$

(3) Wegen (1) gilt in $(*)$ sogar $f(\xi) > f(x)$ und ξ kann nicht am Rand liegen, also $\xi \in (a,b)$.

(4) Wegen der notwendigen Bedingung für Extremstellen gilt $f'(\xi) = 0$ ← da f lt. Voraus. diffbar auf (a,b)

Damit haben wir ein $\xi \in (a,b)$ gefunden mit $f'(\xi)=0$ $\square$

3 (a) (MWS-Integral) Zur Fläche unter dem Graphen einer stetigen Fkt f auf $[a,b]$ gibt es ein flächengleiches Rechteck, dessen Höhe durch den Funktionswert von f an einer Stelle $\xi \in [a,b]$ gegeben ist.



(b) (Hauptsatz, Teil 2) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

wobei F eine (beliebige) Stammfunktion von f ist.

(c) (Partielle Integration)

Die Produktregel lautet für $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar:

$$(f\cdot g)' = f'g + fg'$$

Wir rechnen

$$f\cdot g\Big|_a^b \underset{\text{HS, Teil 2}}{=} \int_a^b (f\cdot g)' = \int f'g + \int fg'$$ und daher gilt

$$\boxed{\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = f\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt}$$