# Aufgabensammlung
# Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2022

Ohne Mathematik tappt man doch immer im Dunkeln.

---

*Werner von Siemens 1816–1892*

Diese Aufgabensammlung ist die Grundlage für die *Übungen zur Analysis in einer Variable für das Lehramt*. Die hier zusammengestellten Aufgaben dienen der Erarbeitung und Vertiefung des Stoffes aus der Vorlesung. Sie entfalten ihre volle positive Wirkung, nur dann, wenn sie *eigenständig* durchgedacht und bearbeitet bzw. gelöst werden[1]!

Die Aufgaben sind eng auf die Vorlesung zugeschnitten und speziell für die *fachliche* Ausbildung im *Lehramststudium* konzipiert. Zusätzlich zur üblichen Mischung aus

- „Routineaufgaben“ (kürzer, einfacher, stellen technisches Basisverständnis her) und
- „Tiefenaufgaben“ (länger, aufwendiger, betreffen inhaltliche Aspekte der Begriffe, die sich erst durch eigenständiges Denken/Arbeiten erschließen)

enthält diese Sammlung daher auch

- *Schnittstellenaufgaben*[2], die gezielt Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik herstellen, um es den Studierenden zu erleichtern, sinnstiftende Verbindungen zwischen diesen beiden „Welten“ aufzubauen.

Außerdem treten immer wieder

- *Multiple Choice-Aufgaben* auf, die dazu dienen das Verständnis eines Begriffs[3] zu verfeinern und Sie herausfordern (sollen) genau zu diskutieren, *warum* eine Antwortmöglichkeiten richtig oder faslch ist.

Viel Vergnügen und Erfolg auf Ihrer
Entdeckungsreise in die Analysis
Roland Steinbauer

[1]Mathematik ist kein Zuschauersport, vgl. (Schichl, Steinbauer, *Einführung in das mathematische Arbeiten*, Springer 2018), Abschnitt 1.2.3. Dabei möchte ich Sie ausdrücklich zum Arbeiten in Gruppen ermutigen aber von Abschreibübungen abraten—diese sind doch nur Zeitverschwendung.

[2]Das Konzept der Schnittstellenaufgaben und -module geht auf Thomas Bauer zurück, siehe etwa (Bauer, Partheil, *Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik*, Math. Semesterber. 56, 85-103, 2009) und (Bauer, *Schnittstellenaufgaben als Ansatz zur Vernetzung von Schul- und Hochschulmathematik* In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. WTM-Verlag.)

[3]Im Sinne einer präzisen Formulierung, einer gute Vorstellung und der Fähigkeit ihn in neuen Zusammenhängen verwenden zu können.

# Blatt 0: EMA—Da Capo![1]

$\boxed{1}$ *Betrag und Ungleichungen.*

(a) Wiederhole die Definition des (Absolut-)Betrags einer reellen Zahl (siehe etwa [EMA, Def. 6.4.11]) und skizzieren den Graphen der Betragsfunktion.

(b) Skizziere die Graphen der Funktionen

(i) $f_1(x) = x^3$ (iii) $g_1(x) = x^2 - 2$
(ii) $f_2(x) = |x^3|$ (iv) $g_2(x) = |x^2 - 2|$

Beschreibe in möglichst knappen Worten, wie sich die Graphen von $f_2$ und $g_2$ von denen von $f_1$ und $g_1$ unterscheiden.

(c) Löse folgende Ungleichungen rechnerisch, skizziere aber auch graphisch:

(i) $|3x + 4| \leq |x + 8|$ (ii) $3 - \frac{x+1}{x-2} < \left|\frac{x-4}{x-2}\right|$ (iii) $|3x^2 - 8x - 7| \leq 4$

$\boxed{2}$ *$\varepsilon$-Umgebung.* Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$ definieren wir die (offene) $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ als das offene Intervall $U_\varepsilon(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Es gilt, dass $x$ genau dann in $U_\varepsilon(x_0)$ liegt, falls sein Abstand zu $x_0$ kleiner $\varepsilon$ ist also

$$x \in U_\varepsilon(x_0) \iff |x - x_0| < \varepsilon. \tag{1}$$

(a) Skizziere $U_\varepsilon(x_0)$ für $x_0 = 0$, $\varepsilon = 1/10$ sowie für $x_0 = -1$, $\varepsilon = 1/100$.

(b) Gib einen formalen Beweis von Aussage (1). *Tipp:* Verwende, dass nach Def. des Betrags $a \leq b$ und $-a \leq b \Rightarrow |a| \leq b$ gilt; beginne mit dem Spezialfall $x_0 = 0$.

$\boxed{3}$ *Verkehrte Dreiecksungleichung*[2]. Zeige die Ungleichung

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b|.$$

*Tipp:* Verwende kreativ(!) die (richtige) Dreiecksungleichung und den Tipp zu $\boxed{2}$(b).

$\boxed{4}$ *Abschätzungen und Mengen.* Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad B := \{x \in \mathbb{R} : |x| > 0\} \quad C := \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\}. \tag{2}$$

Welche der Inklusionsketten gelten und warum?

(i) $A \subseteq C \subseteq B$ (ii) $A \subseteq B \subseteq C$ (iii) $B \subseteq A \subseteq C$ (iv) $A \subseteq B = C$

[1] Der Ausruf „Da capo!" ist eine Beifallsbekundung durch ein Publikum. Das Stück war so gut, dass man es am liebsten noch einmal von Beginn an hören würde.

[2] Diese Ungleichung wird in der Vorlesung benötigt—Achtung gefährliche Drohung!

$\boxed{5}$ *Schranken—Supremum und Infimum.* Wir gehen von der Definition des Supremums (Infimums) für Teilmengen von $\mathbb{R}$ aus (vgl. [EMA, Def. 4.2.32]): Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben (unten) beschränkt. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Supremum (Infimum) von $A$, falls

(i) $a$ obere (untere) Schranke von $A$ ist und

(ii) jedes $a'$ mit $a' < a$ ($a' > a$) nicht obere (untere) Schranke von $A$ ist.

Mache dir diese Definition graphisch klar und löse dann folgende Aufgaben:

(a) Bestimme (falls sie existieren) obere und untere Schranken, Supremum und Infimum sowie Maximum und Minimum der folgenden Mengen:

$$A = [0, 1), \quad B = \{1 + (-1)^n |\ n \in \mathbb{N}\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2x-1}{x-5} \geq 5\}.$$

(b) Wir betrachten nun einen nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ und eine Zahl $a \in \mathbb{R}$. Was ist das stärkste der logischen Symbole, das anstelle von $\bowtie$ in der Aussage

$$a \text{ ist Supremum von } M \qquad \bowtie \qquad a \text{ is Maximum von } M$$

korrekt eingesetzt werden kann und warum?

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) keines davon

(c) Für das Intervall $I = [0, b)$ gilt natürlich $b = \sup I$. Welche der folgenden Aussagen ist dazu äquivalent und welche ist überhaupt richtig und warum?

(i) $b$ ist obere Schranke für $I$.

(ii) $b$ ist größtes Element von $I$.

(iii) $b$ ist keine obere Schranke von $I$.

(iv) $b$ ist obere Schranke von $I$ und es gibt keine kleinere obere Schranke von $I$.

$\boxed{6}$ *Schranken—Supremum und Infimum, zum Zweiten und anspruchsvoller.*

(a) Bestimme (wie oben in $\boxed{4}$(a) nur schwieriger und falls sie existieren) obere und untere Schranke, Supremum und Infimum sowie Maximum und Minimum der Menge

$$D = \{\frac{x}{x+1} |\ x \geq 0\}.$$

*Tipp:* Mache dir die Situation graphisch (etwa durch Plotten der Funktion) klar, um zu einer Vermutung (vor allem über das Supremum) zu gelangen. Diese versuche dann zu beweisen indem du die beiden Punkte in der Definition extra angehst.

(b) Beweise dass, die Sprechweise von *dem* Supremum gerechtfertigt, dieses also eindeutig bestimmt ist. Genauer zeige: das Supremum einer nach oben beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt.

*Tipp:* Wie bei Eindeutigkeitsbeweisen oft zielführend, nimm an, es gebe ein zweites Supremum. Dann lässt sich mittels Punkt (ii) in der Definition ein Widerspruch basteln—gar nicht so schwer.

# Blatt 1: Wachstum, Archimedes und Folgen

$\boxed{1}$ *Wachstum, 1.*

(a) Zeige mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 4$ die Ungleichung[1]

$$n^2 \leq 2^n \text{ gilt.}$$

(b) Aufgabe (a) besagt, dass ab $n \geq 4$ die Potenz $n^2$ langsamer wächst als das Exponential $2^n$. Nun beweisen wir, dass das Exponential $2^n$ (wiederum für geeignet große $n$) seinerseits von der Fakultät $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ dominiert wird. Der langen Rede kurzer Sinn: Beweise, dass für alle $n \geq 4$

$$2^n < n! \quad \text{gilt.}$$

$\boxed{2}$ *Darstellung von Folgen, 1.*
Stelle die drei beteiligten Folgen aus Aufgabe $\boxed{1}$

$$a_n = n^2, \quad b_n = 2^n \quad \text{und} \quad c_n = n!$$

graphisch durch ihren Graphen dar, vgl. Vo. 1.2.4. Überzeuge dich von der Korrektheit der Aussagen in Aufgabe $\boxed{1}$.
*Hinweis:* Hier ist die Verwendung von Hilfsmitteln aus der EDV nicht nur erlaubt, sondern explizit erwünscht. Möglichkeiten sind *GeoGebra* (Befehl: Folge(⟨Ausdruck⟩, ⟨Variable⟩, ⟨Startwert⟩, ⟨Endwert⟩)), *Mathematica* (Befehle Table, bzw. RecurrenceTable und ListPlot) oder Folgenplotter im www.

$\boxed{3}$ *Anwendung der Archimedischen Eigenschaft.*
Betrachte die Menge

$$B := \{1 + \frac{1}{n} : \ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Wie sieht die Menge $B$ aus? Skizziere sie!
Zeige, dass sie beschränkt ist und errate ihr Infimum.

(b) Beweise, dass du richtig geraten hast.

$\boxed{4}$ *Schnittstellenaufgabe: Reiskörner, Halbierungswachstum & geometrische Reihe, 1.*

Folgen sind auch ein Thema in der Schulmathematik und finden sich so auch in Schulbüchern. Besonders beliebt ist eine Folge, die auch in der Analysis insgesamt und daher auch in der Vorlesung eine große Rolle spielt. Mit ihr befassen wir uns in dieser Aufgabe.

Zu diesem Zweck schauen wir uns zwei, zunächst wenig verwandt ausschauende Ausgangsbeispiele an, mit denen das Thema in der Schule oft motiviert wird, vgl. „Neue Wege, Analysis II“ (2011), S. 110f. Vielleicht kommen sie dir bekannt vor.

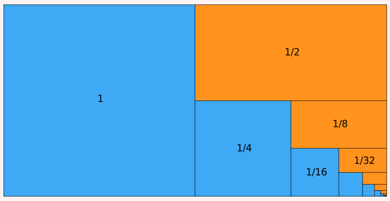
[1] Sie wird in der Vorlesung benötigt—Wieder eine gefährliche Drohung!

### Das Märchen vom Reiskorn und dem Schachbrett

Im alten Persien erzählten sich die Menschen einst dieses Märchen: Es war einmal ein kluger Höfling, der seinem König ein kostbares Schachbrett schenkte. Der König war über den Zeitvertreib sehr dankbar und so sprach er zu seinem Höfling: „Sage mir, wie ich dich zum Dank für dieses wunderschöne Geschenk belohnen kann. Ich werde dir jeden Wunsch erfüllen.“ „Nichts weiter will ich, als dass Ihr das Schachbrett mit Reis auffüllen möget. Legt ein Reiskorn auf das erste Feld, zwei Reiskörner auf das zweite Feld, vier Reiskörner auf das dritte, acht auf das vierte und so fort.“ Der König war erstaunt über soviel Bescheidenheit und ordnete sogleich die Erfüllung des Wunsches an. Sofort traten Diener mit einem Sack Reis herbei und schickten sich an, die Felder auf dem Schachbrett nach den Wünschen des Höflings zu füllen. Bald stellten Sie fest, dass ein Sack Reis gar nicht ausreichen würde und ließen noch mehr Säcke aus dem Getreidespeicher holen. 64 Felder hatte das Schachspiel. Schon das zehnte Feld musste für den Höfling mit 512 Körnern gefüllt werden. Beim 21. Feld waren es schon über eine Million Körner. Und lange vor dem 64. Feld stellten die Diener fest, dass es im ganzen Reich des Königs nicht genug Reiskörner gab, um das Schachbrett aufzufüllen.

### Halbierungswachstum

Aus einem Einheitsquadrat entstehen durch fortgesetze Halbierung jeweils die eingefärbten Rechtecke und Quadrate. Diese werden als Mosaik wie in dem Bild an das Quadrat angelegt.




Basierend auf diesen Texten definieren wir zwei Folgen $(r_n)$ und $(a_n)$, wobei

- $(r_n)$ die Gesamtzahl der Reiskörner auf den Schachbrettfeldern 0 bis $n$ angibt und
- $(a_n)$ den Gesamtflächeninhalt der Rechtecke bis einschließlich der $n$-ten Iteration.

Weil es die Sache leichter macht, beginnen wir in beiden Fällen bei 0 zu zählen, also beim 0-ten Feld auf dem Schachbrett, bzw. sehen wir das Rechteck mit Flächeninhalt 1 als das 0-te Rechteck an.

So nun endlich zu der Aufgabenstellung:

(a) Drücke für ein $n \in \mathbb{N}$ die Folgenglieder $r_n$ und $a_n$ jeweils mithilfe des Summenzeichens aus.

(b) Finde und begründe eine geschlossene Formel für $r_n$ und $a_n$.

(c) Stelle beide Folgen als Graph dar.

$\boxed{5}$ *Darstellung von Folgen, 2.*
Stelle die folgenden Folgen aus Vo. Bsp. 1.2.5 einmal als „Spaziergang in $\mathbb{R}$“ und einmal durch ihren Graphen dar (siehe Vo. 1.2.4).

*Hinweis:* Für die Graphen beachte den Hinweis in Aufgabe $\boxed{2}$. Für den „Spaziergang in" kann ebenfalls z.B. Geogebra (siehe etwa `https://www.geogebra.org/m/FAPX7M7Q`) oder *Mathematica* verwendet werden.

(a) $a_n = (-1)^n$ („Vorzeichenmaschine")

(b) $b_n = \frac{n}{n+1}$

(c) $c_n = \frac{n}{2^n}$

(d) Die Fibonacci-Folge: $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ $(n \geq 2)$

(e) $d_n = x^n$ für ein beliebiges aber fixes $x \in \mathbb{R}$.
Wie ändert sich das Aussehen der Folge in Abhängigkeit vom Wert von $x$?

(f) $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k$ (Geometrische Reihe)
Wie ändert sich das Aussehen der Folge in Abhängigkeit vom Wert von $x$?

$\boxed{6}$ *Veranschaulichung von Folgen, 3.*
Stelle die Graphen der folgenden Folgen dar:

(a) $a_n = \dfrac{n^k}{2^n}$ für ein fixes $k \in N$. Wie ändert sich das Aussehen abhängig von $k$?

(b) $b_n = \dfrac{n!}{2^n}$ (c) $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (d) $d_n = \sqrt{n^2+n} - n$

(e) Was haben Aufgaben $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ mit den Aufgaben (a) und (b) zu tun? Genauer: Welches Verhalten von $a_n$ und $b_n$ kann auf Basis von $\boxed{1}$ & $\boxed{2}$ erwartet werden? In Analogie: Was sagt das Verhalten von $c_n$ über das relative Wachstum von $n!$ und $n^n$ aus?

$\boxed{7}$ *Wachstum, 2.*
Zeige, dass für alle $1 \leq n \in \mathbb{N}$ die folgenden Abschätzungen gelten

(a) $\displaystyle \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

(b) $\displaystyle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3.$

*Anleitung:* Hier ist geschicktes Rechnen *und* Durchhaltevermögen gefragt. Um dir letzteres zu erleichtern ein paar Hinweise zu ersterem: Für (a) verwende die geschlossene Formel für den Binomialkoeffizienten und (geschickt!) die Darstellung der Fakultät durch ein Produkt. Für die erste Ungleichung in (b) bietet sich die Verwendung des Binomischen Lehrsatzes und die von (a) an. Für die zweite Ungleichung in (b) lassen sich die Fälle $n < 4$ per Hand erledigen. Für den Rest ziehe Aufgabe 1 und (wiedereinmal) die geometrische Summenformel heran.

# Blatt 2: Folgen & Konvergenz

$\boxed{1}$ *Die Macht von $\frac{1}{n}$ — Nachtrag.*
Gegeben sind die folgenden beiden Aussagen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{A}$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 : \ \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{B}$$

Was stimmt? Begründe!

(a) Die zwei Aussagen sind äquivalent, und sie sind beide wahr.

(b) Die zwei Aussagen sind äquivalent, und sie sind beide falsch.

(c) Die Aussagen sind nicht äquivalent, und nur (A) ist wahr.

(d) Die Aussagen sind nicht äquivalent, und nur (B) ist wahr.

$\boxed{2}$ *Konvergenz aus der Definition.*
Zeige direkt aus der Definition des Grenzwerts, dass $a_n = 1/\sqrt{n}$ eine Nullfolge ist.
*Tipp:* Orientiere dich an Vo. 1.2.11(ii).

$\boxed{3}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 1.*
Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, bestimme ihren Grenzwert[1].

(a) $\dfrac{2n^2 + 3n}{2n - 3n^2}$ (b) $\dfrac{2n^2 + 3n}{2n - 2n^3}$ (c) $\dfrac{2n^3 + 3n}{3n - 2n^2}$

(d) Formuliere deine Rechenerfahrung aus (a)–(c) in einer allgemeinen Aussage.

$\boxed{4}$ *Divergenz der Vorzeichenmaschine—Da Capo.*
In Vo. $\boxed{1}$ 2.11(iii) haben wir mittels eines indirekten Beweises gezeigt, dass die Folge $a_n = (-1)^n$ divergiert. Zeige dieses Resultat nun direkt aus der Definition (durch Finden von Versager-$\varepsilon$'s).

$\boxed{5}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 2.*
Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, bestimme ihren Grenzwert[1].

(a) $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ (b) $\dfrac{1 + 2 \cdot 3^n}{5 + 4 \cdot 3^n}$ (c) $\dfrac{\sum_{k=0}^{n}(3k-2)}{n^3 + 2n}$

[1]Um einen Kandidaten für den Grenzwert zu erhalten, plotte die Folge. Außerdem kann es nicht schaden, das Ergebnis mittels Geogebra oder Mathematica zu überprüfen. Tatsächlich besteht die Aufgabe aber darin, den Grenzwert *händisch* zu berechnen.

$\boxed{6}$ *Alternative Formulierungen der Konvergenz?*
Sei $(x_n)$ eine reelle Folge und $x \in \mathbb{R}$. Sind die folgenden Aussagen äquivalent zu $x_n \to x$? Argumentiere, gib einen Beweis oder finde ein Gegenbeispiel.

(a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \ |x_n - x| \leq \varepsilon$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \ |x_{2n} - x| < \varepsilon$

(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \ |x_n - x| < 2\varepsilon$

(d) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \ |x_n - x| < \varepsilon$

(e) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : \ |x_n - x| < 2\varepsilon$

(f) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \ |x_n - x| < 2\varepsilon$

(g) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : \ |x_n - x| < 2\varepsilon$

$\boxed{7}$ *Schnittstellenaufgabe: Verbale Umformulierungen der Grenzwertdefinition.*
Im Schulkontext ist es wichtig, *gute* verbale Umformulierungen der Grenzwertbedingung zu verwenden. Insbesonders müssen Lehrer*innen richtige von falschen Schüler*innenäußerungen unterscheiden können.

Diskutiere daher welche der folgenden Umformulierungen der Grenzwertdefinition für eine reelle Folge zutreffend sind. Begründe oder gib ein Gegenbeispiel!

Eine Folge $x_n$ konvergiert gegen $x$, falls

(a) sie sich $x$ immer mehr annähert.

(b) sie sich $x$ immer mehr annähert, ohne $x$ je zu erreichen.

(c) sie $x$ schließlich beliebig nahe kommt.

(d) in einer $\varepsilon$-Umgebung von $x$ alle Folgenglieder $x_n$ liegen.

(e) in jeder $\varepsilon$-Umgebung von $x$ unendlich viele Folgenglieder $x_n$ liegen.

(f) in einer $\varepsilon$-Umgebung von $x$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder $x_n$ liegen.

(g) in jeder $\varepsilon$-Umgebung von $x$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder $x_n$ liegen.

$\boxed{8}$ *Technische Abschätzung—Fingerübung im Weglassen von Termen.*[2]
Zeige für jedes $\mathbb{R} \ni x \geq 0$ und jedes $\mathbb{N} \ni n \geq 2$ die Abschätzung

$$(1+x)^n \ \geq \ \frac{n^2}{4}\, x^2.$$

*Tipp:* Verwende den Binomischen Lehrsatz und lasse großzügig(st) alle Terme weg, die du nicht benötigst, um die gewünschte rechte Seite zu erhalten. Da diese alle positiv sind, erhältst du eine Abschätzung nach unten.

[2] Vgl. den Beweis der Bernoulli-Ungleichung (Vo. 1.1.4)—nur noch viel brutaler!.

# Blatt 3: Folgen & Konvergenz, Teil 2

$\boxed{1}$ *Schnittstellenaufgabe: Reiskörner, Halbierungswachstum & geometrische Reihe, 2.* Wir kehren zu Aufgabe $\boxed{4}$ von Blatt 1 zurück, d.h. zur Geschichte von den Reiskörnern und zum Halbierungswachstum. Greife auf die dort in Aufgabenteil (a) gefundenen Summendarstellungen der Folgen $(r_n)$ und $(a_n)$ zurück und bearbeite die folgenden Aufgaben:

(a) Formuliere aufgrund der in Aufgabe $\boxed{4}$ (c), Blatt 1 erstellten Graphen für $(r_n)$ und $(a_n)$ Vermutungen über den Grenzwert der beiden Folgen.

(b) Zeige mittels Rückgriff auf Vorlesung 1.2.37, dass deine Vermutungen richtig waren.

(c) Greife nun auch auf Aufgabe $\boxed{4}$ (b), Blatt 1 und die dort gefundenen geschlossenen Darstellungen von $(r_n)$ und $(a_n)$ zurück. Überprüfe direkt an diesen Darstellungen, dass die Grenzwerte aus (b) korrekt sind.

*Hinweis:* Wenn du in Aufgabe $\boxed{4}$ (b), Blatt 1 effizient vereinfacht hast, dann ist deine Argumentation in (c) ein Spezialfall des Beweises von 1.2.37 aus der Vorlesung.

$\boxed{2}$ *Verständnisaufgabe zur Grenzwertdefinition, 1.*
Betrachte die folgenden Aussagen. Welche stimmt, welche nicht? Begründe!

Die Folge $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$

(1) ist eine Nullfolge, weil alle Folgenglieder gleich 0 sind,

(2) ist eine Nullfolge, weil ab einem gewissen Index alle Folgenglieder gleich 0 sind,

(3) ist eine Nullfolge, weil es ein Folgenglied gibt, das gleich 0 ist,

(4) ist eine Nullfolge, obwohl kein einziges Folgenglied gleich 0 ist.

$\boxed{3}$ *Verständnisaufgabe zur Grenzwertdefinition, 2.*
Betrachte die folgenden Aussagen. Welche stimmt, welche nicht? Begründe!

Für die Folge $(\frac{1}{10^6}, 0, \frac{1}{10^6}, 0, \frac{1}{10^6}, \dots)$ gilt:

(1) Alle Folgenglieder liegen in der $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(0)$, wenn man $\varepsilon := 1/1000$ wählt, daher ist sie eine Nullfolge.

(2) Es gibt eine $\varepsilon$-Umgebung von 0, in der nicht fast alle Folgenglieder liegen, daher ist sie keine Nullfolge.

(3) In jeder $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(0)$, liegen fast alle Folgenglieder, daher ist sie Nullfolge.

(4) Es gibt eine $\varepsilon$-Umgebung von 0, in der nur endlich viele Folgenglieder liegen, daher ist sie keine Nullfolge.

$\boxed{4}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 3.*
Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, bestimme ihren Grenzwert[1].

(a) $\sqrt{n^2+n}-n$  (b) $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$  (c) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

*Tipp:* Zunächst stelle fest, dass immer Differenzen von bestimmt divergenten Folgen auftreten und daher nach Vo. 1.2.46 keine allgemeine Hilfe zu erwarten ist. Der Trick besteht nun darin, den Ausdruck zu einem Bruch zu erweitern, indem man die Differenz mit der analogen Summe multipliziert. Dann erhält man mittels $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ im Zähler eine Differenz, die besser zu bearbeiten ist und im Nenner eine Summe.

$\boxed{5}$ *Verständnisaufgabe zur Konvergenz.*
Betrachte nocheinmal die Folge

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1},$$

von der wir oben gesehen haben, dass sie eine Nullfolge ist. Aber welche der folgenden Begründungen ist korrekt, welche nicht? Welche findest du elegant, welche nicht? Begründe!

(1) $(1/n^2)$ ist als Produkt der Nullfolge $(1/n)$ mit sich selbst wieder Nullfolge.

(2) $1/n \leq 1/n^2$ und daher ist $(1/n^2)$ ebenfalls eine Nullfolge.

(3) $1/n^2 \leq 1/n$ und daher ist $(1/n^2)$ ebenfalls eine Nullfolge.

(4) Es gilt $0 \leq 1/n^2 \leq 1/n$ und $1/n \to 0$. Daher folgt mit dem Sandwich Lemma, dass $1/n^2 \to 0$.

$\boxed{6}$ *Linearkombination konvergenter Reihen.*
Beweise Vo. 1.2.39. Genauer zeige, dass für die konvergenten Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) \;=\; \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \;+\; \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

*Tipp.* Wende Vo. 1.2.25 (Linearkombination konvergenter Folgen) auf die Partialsummen an. Dann ist der Beweis ganz einfach!

[1]Wie schon gesagt: Um einen Kandidaten für den Grenzwert zu erhalten, plotte die Folge. Außerdem kann es nicht schaden, das Ergebnis mittels GeoGebra, Mathematica etc. zu überprüfen.

$\boxed{7}$ *Der Folgenanfang ist wirklich egal.*
Betrachte die Folgen ($n \geq 1$)

$$a_n = \sqrt{n + 10^3} - \sqrt{n}, \qquad b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{10^3}} - \sqrt{n}.$$

(a) Skizziere (plotte) die drei Folgen.

(b) Zeige, dass $a_n > b_n > c_n$ für alle $n < 1\,000\,000$.

(c) Berechne die Grenzwerte der drei Folgen.

*Hinweis:* Die nächsten beiden Aufgaben sind technisch schwieriger als die vorigen. Spucke in die Hände und versuche dich trotzdem an ihnen. Auf gutes Gelingen!

$\boxed{8}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 4—Achtung: trickreich.*
Hier begegnen uns alte Bekannte aus Aufgabe $\boxed{6}$ von Blatt 1. Aus den dort gezeichneten Graphen haben wir schon Kandidaten für die respektiven Grenzwerte. Jetzt geht es darum diese Konvergenzen auch formal zu zeigen, also: Bestimme die Grenzwerte der folgenden Folgen:

$$\text{(a)} \quad \frac{n^k}{2^n} \quad (k \in \mathbb{N} \text{ fix aber beliebig}) \qquad \text{(b)} \quad \frac{2^n}{n!} \qquad \text{(c)} \quad \frac{n!}{n^n}$$

*Tipp:* Bei (a) besteht der Standardtrick darin, im Nenner $2 = (1 + 1)$ zu schreiben und dann den Binomischen Lehrsatz zu verwenden. Dann schätze geschickt ab, indem du nur den letztem Term im Binomischen Lehrsatz übrig lässt und diesen sogar durch $\binom{n}{k+1}$ nach unten abschätzt; uff! Teil (b) ist verhältnismäßig einfacher zu haben: Schreibe die Terme in Zähler und Nenner aus, à la $2^n = 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2$ und $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-1)n$. Dann schätze die einzelnen Terme im Bruch gegeneinander ab und verwende das Sandwich-Lemma. Die analoge Strategie führt auch bei (c) zum Ziel!

$\boxed{9}$ *Wurzelfolgen—Ein Standardbeispiel, ebenfalls trickreich!*
Wir haben in Vo. 1.2.31A gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $1 < a \in \mathbb{R}$. Es gilt aber sogar

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

und es ist hier die Aufgabe, diese Konvergenz zu beweisen.

*Tipp:* Diese Aufgabe kann mit denselben Tricks wie in Vo. 1.2.31A begonnen werden. Allerdings wird dann statt der Bernoulli-Ungleichung eine stärkere Abschätzung benötigt, nämlich $(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$, die sich mit Induktion leicht beweisen lässt—das ist aber nicht Teil dieser Aufgabe.

# Blatt 4: Folgen & Konvergenzprinzipien

**1** *Verständnisaufgabe: Eigenschaften von Folgen.*
Kann eine (reelle) Folge $(a_n)$ die folgenden Eigenschaften haben? Wenn ja, gib ein Beispiel, wenn nein, argumentiere.

(a) divergent und beschränkt
(b) unbeschränkt und konvergent.
(c) streng monoton wachsend und nach oben beschränkt.
(d) streng monoton wachsend und unbeschränkt.
(e) bestimmt divergent und beschränkt.
(f) bestimmt divergent und nach oben beschränkt.
(g) unbeschränkt und nicht bestimmt divergent.
(h) beschränkt und konvergent
(i) monoton wachsend, beschränkt und divergent

**2** *Kehrwerte von Nullfolgen divergieren.*
Beweise Vo. Prop. 1.2.47. Genauer, sei $(a_n)$ eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

**3** *Teilfolgen.*
Betrachte die Folge $a_n = (-1)^n \left(\frac{-1}{n}\right)$ $(n \geq 1)$. Welche der angegebenen Folgen sind Teilfolgen von $(a_n)$? Begründe!
*Tipp:* Schreibe jeweils die ersten Folgenglieder explizit an und plotte evtl. die (Teil-) Folgen.

(a) $a_{n_k} = \frac{1}{2k+1}$ $\quad (k \geq 1)$
(b) $a_{n_l} = (-1)^l \frac{1}{2l+1}$ $\quad (l \geq 1)$
(c) $a_{n_m} = \left(-\frac{1}{2m}\right)^m$ $\quad (m \geq 1)$
(d) $a_{n_r} = (-1)^{2r} \frac{1}{2r}$ $\quad (r \geq 1)$
(e) $a_{n_s} = \frac{1}{2k+1}$ $\quad$ (für ein $k \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$)

**4** *Häufungswerte.*
Bestimme jeweils alle Häufungswerte der Folge $(a_n)$. Bestimme weiters Limes inferior und superior von $(a_n)$ und vergleiche diese mit Infimum und Supremum der Menge der Folgenglieder $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Tipp: Plotte die (Teil-)Folgen.*

(a) $a_n = (-1)^n \sqrt{2} \quad (n \in \mathbb{N})$
(b) $a_{3n-2} = 3 + \frac{1}{n},\ a_{3n-1} = \frac{2}{n},\ a_{3n} = -\frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{3 + 2n + n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$

$\boxed{5}$ *Schnittstellenaufgabe: Heron-Verfahren zur Approximation von Wurzeln.*
Das Heron-Verfahren ist auch in der Schulmathematik ein Thema. Es dient zur (schnellen) Approximation von Wurzeln und hat eine eindringliche graphische Interpretation, siehe z.B. `https://www.geogebra.org/m/ve2PFcJE`. Hier vertiefen wir in Analogie zu Vo. Bsp. 1.3.24 seinen theoretischen Hintergrund.

Betrachte folgende Approximation für die Wurzel von $a$: Sei $a > 0$ und $x_0 > 0$.

(a) Zeige, dass die durch die Rekursion ($n \in \mathbb{N}$)

$$x_{n+1} \ := \ \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

definierte Folge $(x_n)$ nach unten beschränkt ist.

(b) Zeige, dass $(x_n)$ ab $n = 1$ monoton fallend ist.

(c) Argumentiere, dass $(x_n)$ konvergiert. Welches Konvergenzprinzip hilft dir hier?

(d) Zeige, dass $x_n \to \sqrt{a}$.

$\boxed{6}$ *Verständnisaufgabe zu Cauchy-Folgen.*
Für eine reelle Folge $(a_n)$ betrachten wir die beiden Bedingungen

(CF) $(a_n)$ ist eine Cauchy-Folge.
(A) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ gilt $|a_n - a_m| \leq 1/n$.

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt und warum?

(1) (CF) und (A) sind äquivalent.

(2) (A) $\implies$ (CF), aber die umgekehrte Implikation ist falsch.

(3) (CF) $\implies$ (A), aber die umgekehrte Implikation ist falsch.

(4) Keine der obigen Aussagen trifft zu.

$\boxed{7}$ *Verständnisaufgabe zu Cauchy-Folgen.* (Da Capo & kniffelig!)
Einer deiner Kolleg*innen betrachtet die Folge $a_n := \sqrt{n}$ und beweist die beiden Tatsachen (Anmerkung: Diese sind korrekt!)

$$\text{(i) } a_n \to \infty \qquad \text{und} \qquad \text{(ii) } |a_{n+1} - a_n| \to 0.$$

Jetzt sieht er folgendes „Problem“ und fragt in die Runde:

> „Die Folge $a_n = \sqrt{n}$ ist wegen (i) nicht konvergent und wegen (ii) ist sie eine Cauchy-Folge. Das steht doch im Widerspruch zum Cauchy-Prinzip (Vo. Theorem 1.3.18). Was soll das bitte?“

Löse diesen Widerspruch auf. Die richtige Antwort versteckt sich unten in den folgenden vier. Argumentiere!

(1) Die Folge ist doch konvergent.

(2) Die Folge erfüllt die Bedingung der bestimmten Divergenz/uneigentlichen Konvergenz (Vo., Definition 1.2.42) und ist daher auch „irgendwie konvergent“.

(3) Die Folge ist doch *keine* Cauchy-Folge.

(4) Es gibt *doch* Cauchy-Folgen, die nicht konvergent sind.

$\boxed{8}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Benachbarte Folgenglieder bei Cauchyfolgen.*
Diese Aufgabe greift das oben thematisierte und verbreitete Mißverständnis bzgl. Cauchy-Folgen auf: Es genügt nicht, dass die Differenz benachbarter später Folenglieder klein wird, es muss die Differenz *beliebig weit entfernter* später Folgenglieder klein werden!

Die folgende Aufgabe liefert eine hinreichende Bedingung für die Cauchy-Eigenschaft an *benachbarte* späte Folgenglieder. Sie verlangt allerdings ein „schnelles“ Kleiner-Werden ihrer Differenzen.

(a) Sei $(a_n)$ eine reelle Folge mit der Eigenschaft

$$|a_n - a_{n+1}| \;\leq\; \frac{1}{2^n}.$$

Zeige, dass $(a_n)$ eine Cauchfolge ist.
*Tipp.* Für $m \geq n$ ist $a_n - a_m = a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots - a_m$. Dann verwende die geometrische Reihe!

(b) Betrachte konkret die durch folgende Rekursion gegebene Folge $(a_n)$

$$a_0 = 0,\; a_1 = 1,\; a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \qquad (n = 2, 3, \dots).$$

Zeige, dass $a_n$ eine Cauchyfolge ist.
*Tipp:* Weise induktiv die Formel $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ nach. Das erlaubt es Teil (a) zu verwenden.

(c) Berechne den Grenzwert von $a_n$ aus (b).
*Tipp.* Es gilt $a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$ und dann geometrische Reihe—was sonst?

# Blatt 5: Folgen & Reihen

1 *Verständnisaufgabe: Eigenschaften von Folgen, 2.*
Kann eine (reelle) Folge $(a_n)$ die folgenden Eigenschaften haben? Wenn ja, gib ein Beispiel, wenn nein, argumentiere.

(a) Hat zwei verschiedene Limiten.
(b) Hat zwei verschieden Häufungswerte.
(c) Hat einen Limes und einen Häufungswert.
(d) Hat einen Limes und zwei verschiedene Häufungswerte.
(e) Hat einen Häufungswert, ist aber nach oben unbeschränkt.
(f) Ist beschränkt aber hat keinen Häufungswert.

2 *Berührpunkte und Häufungspunkte konkret.*
Bestimme jeweils alle Berührpunkte und Häufungspunkte der angegebene Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(a) $A = [a, b) \cup (b, c] \quad (a < b < c)$
(b) $B = \{\frac{1}{n^2} : \ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$
(c) $C = (1, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$
(d) $D \subseteq \mathbb{R}$, beliebige endliche Teilm.

3 *Berührpunkte und Häufungspunkte theoretisch.*
Beweise Vo. Prop. 1.3.30(ii), genauer zeige für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ die folgende Aussage gilt:

$$a \text{ ist Häufungspunkt von } A \iff a \text{ ist Berührpunkt von } A \setminus \{a\}$$

*Hinweis.* Die schwierigere Richtung ist die Rückrichtung: Mit einer Konstruktion analog zu Vo. 1.3.30(i) „$\Rightarrow$" findest du entsprechende Punkte oder, falls dir das sympathischer ist, eine Folge...

4 *Verständnisaufgabe: Reihenkonvergenz.*
Betrachte die folgenden Aussagen. Welche stimmt, welche nicht? Begründe!

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(1) ist konvergent, denn es gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.
(2) ist konvergent, denn es gilt $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \,/\, \frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$
(3) ist divergent, denn $\sum \frac{1}{n}$ divergiert und $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$.
(4) ist divergent, denn $\sum \frac{1}{n}$ divergiert und $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum \frac{1}{n}}$.

$\boxed{5}$ *Konvergenz von Reihen.*
Untersuche ob die angegeben Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren.

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{(n+2)(n+1)}$ (b) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ (c) $a_n = \dfrac{1+n}{n}$

$\boxed{6}$ *Verständnisaufgabe: Die geometrische Reihe — Finde den Fehler!*
Eine*r deiner Schüler*innen verwendet die Summenformel der geometrischen Reihe in der Rechnung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k}{10}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{k}{10}} = \frac{10}{10-k} \qquad (*)$$

und berechnet damit für die konkreten Werte $k=5$ und $k=15$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{11}{10}\right)^n = -10 \quad (**).$$

Jetzt sieht er/sie folgendes Problem und wendet sich an dich:

> „Das Ergebnis in $(**)$ kann nicht stimmen, denn alle Summanden auf der linken Seite sind positiv, also kann keine negative Zahl rauskommen, oder? Ich seh aber nicht, wo ich einen Fehler gemacht hab. Hilfe!"

Löse das Problem auf. Die richtige Antwort versteckt sich unter den folgenden vier. Argumentiere!

(1) Die Aussage $(*)$ gilt nicht für alle $k \in \mathbb{N}$.

(2) Bei $(**)$ ist ein Rechenfehler passiert.

(3) In $(*)$ wurde in die Summenformel für die geometrische Reihe nicht richtig eingesetzt.

(4) Das Ergebnis in $(**)$ stimmt schon, denn der Reihenwert kann negativ sein, auch wenn alle Reihenglieder positiv sind.

$\boxed{7}$ *Verständnisaufgabe: Die geometrische Reihe, zum Zweiten*
Was stimmt? Argumentiere!
Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$$

(2) hat den Wert $\frac{9}{4}$.

(3) ist gar nicht konvergent.

(4) hat den Wert $\frac{7}{4}$.

(1) hat den Wert $\frac{11}{4}$.

$\boxed{8}$ *Absolute Konvergenz von Reihen.*
Sind die folgenden Reihen absolut konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$

Die Dezimaldarstellung bzw. allgemeiner die Darstellung von Zahlen bzgl. beliebiger Basen $b \geq 2$ ($b$-adische Entwicklung, vgl. Vo. 1.4.26ff) ist ein relevantes Thema der Schulmathematik. In den letzten beiden Aufgaben auf diesem Blatt beleuchten wir etwas den (analytischen) Hintergrund.

$\boxed{9}$ *Schnittstellenaufgabe: Dezimaldarstellung explizit.*
Wir betrachten die Dezimalzahlen

$$p = 1,374, \quad q = 0,12121212\ldots = 0,\overline{12} \quad \text{und} \quad r = 0,121122111222\ldots.$$

(a) Gib explizit die Dezimaldarstellung (d.h. die $b$-adischer Darstellung für $b = 10$)

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n 10^{-n} \quad \text{(vgl. Vo. Def. 1.4.27)}$$

von $p$, $q$ und $r$ an. Bestimme explizit $N$ und die Ziffern $a_n$.

(b) Zu welchen Zahlenmengen gehören $p$, $q$ und $r$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$?

$\boxed{10}$ *Verständnisaufgabe: Dezimaldarstellung, zum Zweiten*
Wir betrachten nochmals die Dezimalzahl

$$r = 0,12112211122211112222\ldots.$$

Welche Aussage stimmt? Begründe!

Die Dezimaldarstellung von $r$

(1) konvergiert, weil $r$ periodische Dezimalzahl ist.

(2) konvergiert, weil das bei jeder Dezimaldarstellung so ist.

(3) divergiert, weil $r$ nicht periodisch ist.

(4) divergiert, weil sie unendlich viele Nachkommastellen hat, also nicht abbricht.

Beantworte zum Abschluss die Frage:

Was bedeutet es hier eigentlich, dass die Dezimaldarstellung konvergiert?

# Blatt 6: Funktionen & Stetigkeit

$\boxed{1}$ *Verhalten von Funktionen anschaulich*[1].
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenem von $f$ aus? Veranschauliche deine Aussagen durch Skizzen.

(a) $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |f(x)|$

(b) $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(-x)$

(c) $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -f(x)$

(d) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + 2$

(e) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(2x)$

(f) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x - a)$

*Hinweis.* Suche dir ein $f$ aus, an dem der Effekt der jeweiligen Operationen gut sichtbar wird. Das Experimentieren mit einem Funktionenplotter ist nachdrücklich empfohlen!

$\boxed{2}$ *Umgebungsstetigkeit*
Zeige direkt aus der Definition der Stetigkeit (Vo. 2.1.6), dass

(a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ -x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ stetig auf ganz $[-1, 1]$ ist.

(b) $g : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$ unstetig in $x_0 = 0$ ist.

*Tipp:* Schreibe $f$ mit Hilfe der Betragsfunktion und fertige Skizzen an!

$\boxed{3}$ *Verständnisaufgabe: Umgebungsstetigkeit.*
Betrachte die folgenden Aussagen. Welche stimmt, welche nicht? Begründe!

Dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$$

stetig ist, kann man direkt mit der $\varepsilon$-$\delta$-Bedingung aus der Vo., Definition 2.1.6

(1) beweisen, indem man dort $\delta = 2\varepsilon$ wählt,

(2) beweisen, indem man dort $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ wählt,

(3) nicht beweisen, da in diesem Fall kein $\varepsilon$ gegeben ist,

(4) nicht beweisen, denn man benötigt in diesem Fall das Folgenkriterium, Theorem 2.1.12 aus der Vorlesung.

[1] Die Wirkung von Parametern (zumindest bei speziellen) Funktionen ist im Grundkompetenzkatalog zur SRDP im Inhaltsbereich „Funktionale Abhängigkeiten“ etwa in den Punkten FA 2.3, 3.3., 5.3 und 6.3 gelistet.

$\boxed{4}$ *Schnittstellenaufgabe: Verbale Umformulierungen der Stetigkeit.*
Im Schulkontext ist es wichtig, den Stetigkeitsbegriff *gut verbal* formulieren zu können[2]. Insbesonders müssen Lehrer*innen richtige/ungenaue/falsche Formulierungen als solche erkennen, bewerten und ggfs. korrigieren können.

Diskutiere unter diesem Gesichtspunkt die folgenden Formulierungen:

| Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig, falls |
|---|

(1) sich bei kleinen Änderungen von $f(x)$ nahe $f(a)$, auch $x$ nur wenig ändert,

(2) es für jede noch so kleine Umgebung $U_\varepsilon(f(a))$ um den Funktionswert $f(a)$ eine „Sicherheitszone“ $U_\delta(a)$ um $a$ gibt, sodass alle $x$ darin nach $U_\varepsilon(f(a))$ abgebildet werden,

(3) es für jedes vorgegebene & kleine Sicherheitsintervall $U_\delta(a)$ um $a$ es eine Toleranzgrenze $\varepsilon$ gibt, sodass die Funktionswerte für $x \in U_\delta(a)$ $\varepsilon$-nahe bei $f(a)$ sind, d.h. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ gilt,

(4) kleine Schwankungen der Argumente um $a$ nur ein kleine Schwankungen der Funktionswerte um $f(a)$ bewirkt,

(5) falls kleine Ursachen nur eine kleine Wirkung haben,

(6) ein kleines „Wackeln“ der Argumente nur zu einem kleinen „Wackeln“ der Funktionswerte führt.

(7) $f$ konvergente Folgen $x_n \to a$ respektiert, in dem Sinne, dass $f(x_n) \to f(a)$.

$\boxed{5}$ *Grundoperationen für Funktionen anschaulich.*
Analog zu Aufgabe 1 seien $f$ und $g$ Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenen von $f$ und $g$ aus? Veranschauliche deine Aussagen durch Skizzen.

(a) $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(b) $f - g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(c) $\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig

(d) $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(e) $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$,
wobei $D = \{x \in \mathbb{R} : \ g(x) \neq 0\}$

*Hinweis.* Suche dir $f$ und $g$ so aus, dass die Effekte der entsprechenden Operationen gut sichtbar werden. Das Experimentieren mit einem Funktionenplotter ist nachdrücklich empfohlen!

[2]Der Punkt „Den Begriff Stetigkeit kennen und erläutern können“ tritt z.B. im Lehrplan für die AHS-Oberstufe in der 7.Klasse im Kompetenzmodul 6 auf.

$\boxed{6}$ *Stetigkeit der Grundoperationen.*
Beweise die restlichen Fälle von Prop. 2.1.17(i). Genauer zeige, dass für stetige Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$

(a) $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ stetig ist, wobei $D' := \{x \in D : \; g(x) \neq 0\}$.

*Tipp:* Folgenstetigkeit und Grenzwertsätze!

$\boxed{7}$ *Schnittstellenaufgabe: „Bleistitfstetigkeit".*
Eine oft in der Schule anzutreffende intuitive Vorstellung zur Stetigkeit ist:

> Eine Funktion ist stetig, wenn man den Graphen der Funktion, ohne abzusetzen, mit einem Bleistift durchzeichnen kann.

Wir wollen Funktionen mit dieser Eigenschaft vorsichtshalber *bleistiftstetig* nennen.

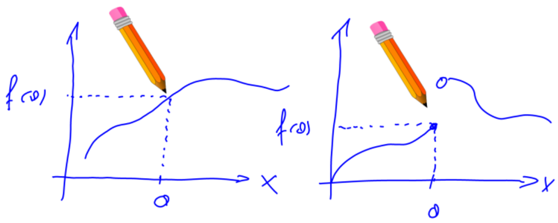



Abbildung 1: Eine bleistiftstetige und eine nicht bleistiftstetige Funktion

Betrachte die folgenden Funktionen[3] und bearbeite die Punkte (i) und (ii):

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \end{cases} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x \end{cases} \qquad i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(i) Skizziere die Graphen von $f$, $g$, $h$ und $i$ und stelle fest, an welchen Stellen sie stetig bzw. unstetig sind. Begründe deine Aussagen (keine Beweise!).
*Tipp:* für $h$ und $i$ gibt es sehr brauchbare Veranschaulichungen mit Geogebra unter `https://ggbm.at/g7r7KdaQ` bzw. `https://ggbm.at/whZbDSNa`.

(ii) Welche der Funktionen sind bleistiftstetig?
Wenn dir jetzt Zweifel an der einschlägigen Definition kommen: sehr gut! Versuche sie zu präzisieren und so im Lichte der obigen Beispiele möglichst äquivalent zur „echten" Stetigkeit zu machen.

---
[3]Wir haben die Sinus-Funktion im Rahmen der Vorlesung noch nicht definiert. Für diese Aufgabe ist es aber ausreichend, dein Schulwissen heranzuziehen.

# Blatt 7: Stetigkeit & Grenzwerte von Funktionen

$\boxed{1}$ *Stetigkeit — Da Capo.*
An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen stetig bzw. unstetig? Begründe deine Aussagen (keine Beweise!).

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(x+1)$

(b) $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 - 1)/(x+1)$

(c) Inwiefern unterscheiden sich $f$ und $g$ nahe $x_0 = -1$?

(d) $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{sgn}(x) := x/|x|$ $x \neq 0$ und $\mathrm{sgn}(0) := 0$.

*Hinweis:* Das Anfertigen von Skizzen ist explizit erwünscht!

$\boxed{2}$ *Grenzwerte explizit.*
Untersuche, ob die Grenzwerte existieren und wenn ja, berechne sie! Zeichne auch die Graphen der jeweiligen Funktion.

(a) $\displaystyle\lim_{x \searrow 1} \frac{1+x}{1-x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 5x^2 - 1}{1 - x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{x^2 - 131x - 97}{(x+17)(x+1)}\right)$

$\boxed{3}$ *Verständnisaufgabe: Grenzwerte von Funktionen.*
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$f(\frac{1}{n}) = 0 \quad \text{für alle } n \geq 1\,,$$

d.h. $0 = f(1) = f(1/2) = f(1/3) = f(1/4) = \dots$.
Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Begründe.

(1) Es gilt $f(0) = 0$.

(2) Es gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(3) Man kann beides folgern und daher ist $f$ stetig in 0.

(4) man kann keine der beiden Aussagen (1) und (2) folgern.

$\boxed{4}$ *Alternative Bedingung für den Funktionsgrenzwert.*
In der Vorlesung, Def. 2.1.21 haben wir den Grenzwert für Funktionen über Folgen definiert, genauer: Für eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und einen Berührpunkt $a$ des Definitionsbereichs $D$ gilt

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \quad \text{(wobei wir hier nur } c \in \mathbb{R} \text{ betrachten)}$$

falls für

$$\text{jede Folge } (x_n)_n \text{ in } D \text{ mit } x_n \to a \text{ gilt, dass } f(x_n) \to c. \tag{1}$$

Zeige, dass diese Bedingung (1) äquivalent zur folgenden Bedingung ist, die formal ähnlicher zur Definition des Folgengrenzwerts ist:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - c| < \varepsilon. \tag{2}$$

$\boxed{5}$ *Schnittstellenaufgabe: Verhalten von Funktionen.*
Im Schulkontext ist es wichtig, ein Gefühl dafür zu entwickeln, welches Verhalten von Funktionen möglich ist und welches nicht[1]. Gesucht sind also Beispiele von Funktionen mit den angegebenen Eigenschaften bzw. Argumente warum es solche Funktionen nicht geben kann. Dabei kannst du explizit Funktionen/Argumente angeben oder auch entsprechende Graphen/Argumente skizzieren.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt.
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und unbeschränkt.
(c) $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, unbeschränkt.
(d) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt, unstetig.
(e) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die kein Maximum besitzt.
(f) $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ stetig, die kein Minimum besitzt.
(g) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ ohne Nullstelle.
(h) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig und schneidet die 1. Mediane nicht.

$\boxed{6}$ *Verständnisaufgabe: Annehmen des Maximums.*
Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Begründe.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(1) hat ein Maximum, wenn sie stetig ist,
(2) hat ein Maximum, wenn sie stetig und beschränkt ist,
(3) hat kein Maximum, wenn sie unstetig ist.
(4) Keine der Aussagen stimmt.

$\boxed{7}$ *Stetig? Stetig fortsetzbar?*
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

(a) Bewerte die Aussage „$f$ ist unstetig im Punkt $x_0 = 0$“.
(b) Zeige, dass $f$ nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.
*Hinweis:* Mache dir zuerst klar, was diese Aussage genau bedeutet, vgl. Vo. 2.1.28.

$\boxed{8}$ *Noch ein Aspekt der Stetigkeit.*
Zeige, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann stetig im Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist, falls sie in $a$ im folgenden Sinn *„gut durch eine konstante Funktion approximiert“* werden kann: Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass der „Restterm“ $R(x) := |f(x) - c|$

$$\lim_{x \to a} R(x) = 0 \quad \text{erfüllt.}$$

*Hinweis:* Fertige eine Skizze an um die Aussage zu verstehen, dann setzte die resp. Definitionen zusammen und beherzige für die schwierigere Rückrichtung Vo. 2.1.22(ii).

[1]Vgl. Grundkompetenzkatalog zur SRDP AHS, Inhaltsbereich „Funktionale Abhängigkeiten“ FA 1.5 (Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen [...] können) & FA 1.9 (Einen Überblick über die wichtigsten Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können).

# Blatt 8: Elementar-transzendente Funktionen

$\boxed{1}$ *Nachtrag zur (Un-)Stetigkeit der Umkehrfunktion.*
Ziel dieser Aufgabe ist es, das Gegenbeispiel in Vorlesung 2.2.18 genau auszuarbeiten. Für die Funktion

$$f : D := [-2, -1) \cup [1, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x + 1, & x \in [-2, -1) \\ x - 1, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

bearbeite daher die folgenden Aufgabenstellungen:

(a) Zeichne den Graphen der Funktion.

(b) Warum und wo[2] hat $f$ eine Umkehrfunktion? Gib sie explizit an und zeichne ihren Graphen.

(c) Untersuche die Stetigkeit der Umkehrfunktion.

(d) Warum ist $f$ *kein* Gegenbeispiel zum Umkehrsatz 2.2.19?

$\boxed{2}$ *Eigenschaften der allgemeinen Exponentialfunktion.*
Wiederhole die Definition der allgemeinen Exponentialfunktion $\exp_a(x) = a^x$ ($a > 0$, $x \in \mathbb{R}$) aus 2.3.4 und beweise die folgenden in Prop. 2.3.6 behaupteten Eigenschaften.

(a) (Funktionalgleichung) $a^{x+y} = a^x\, a^y \quad (x, y \in \mathbb{R})$

(b) (Konsistenz mit natürlichen Exponenten) $\exp_a(m) = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}} \quad (m \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

(c) (Konsistenz mit rationalen Exponenten) $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} \quad (p \in \mathbb{Z},\ 1 \leq q \in \mathbb{N})$

(d) (Doppeltes Exponential) $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x \quad (x, y \in \mathbb{R})$

*Hinweis:* Verwende die entsprechenden Eigenschaften von exp und log aus der Vorlesung. Gehe dabei sorgfältig vor und verwende keine (im Rahmen der Vo.) unbewiesenen Formeln (auch wenn du sie vielleicht aus der Schule kennst)!

$\boxed{3}$ *Verständnisaufgabe: Funktionalgleichung für* exp.
Welche der folgenden Gleichungen ist richtig und kann verwendet werden um die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\exp(z + w) = \exp(z)\, \exp(w)$$

herzuleiten/zu beweisen? Begründe deine Antworten!

(1) $\dfrac{(z + w)^n}{n!} = \dfrac{z^n}{n!}\, \dfrac{w^n}{n!}$, (2) $\dfrac{(z + w)^n}{n!} = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{k-n} w^{n-k}$,

[2] Soll heißen: Auf welchem Definitionsbereich?

(3) $\dfrac{(z+w)^n}{n!} = \dfrac{z^n w^n}{n!}$, (4) $\dfrac{(z+w)^n}{n!} = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k}$.

$\boxed{4}$ *Explizite Grenzwerte.*
Berechne folgende Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{|x|}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} x^x$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

*Tipp:* Verwende 2.3.7[3] und in (a) setze $y = \log(1+x)$.

*Hinweis:* Den Grenzwert in (c) haben wir schon in Aufgabe 3.9 (etwas mühsam) berechnet. Insofern ist das Ergebnis bekannt. Hier kannst du (c) aus (b) folgern, was wesentlich kürzer ist!

$\boxed{5}$ *Verständnisaufgabe: komplexe Umgebungen.*
Betrachte die beiden komplexen Umgebungen (vgl. (E4) aus Abschnitt 2.3.1) $U_1(0)$ und $U_1(1-\mathrm{i})$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Begründe deine Antworten! *Tipp:* Skizze!

Die beiden Umgebungen

(1) schneiden sich in genau einem Punkt.

(2) sind disjunkt

(3) schneiden sich in genau 2 Punkten

(4) haben unendlich viele Punkte gemeinsam.

$\boxed{6}$ *Eigenschaften der Winkelfunktionen.*
Zeige jeweils mindestens eine der Formeln aus (a), (b) bzw. (c):

(a) (Doppelwinkelformeln)
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

(b) (Halbwinkelformeln)
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} \qquad (x\in[0,2\pi])$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \qquad (x\in[-\pi,\pi])$$
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \qquad (x\in(-\pi,\pi))$$

(c) (Produktformeln)
$$2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$
$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$
$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x+y)$$

[3] Image-Pflege: Sollte die Beliebtheit dieser nützlichen Grenzwerte steigern!

$\boxed{7}$ *Winkeldreiteilung.*
Zeige die Formel

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x).$$

*Tipp:* $\cos(x) = (1/2)(e^{ix} + e^{-ix})$.
*Bemerkung.* Mit $\alpha = 3x$ wird aus obiger Formel $4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3) = \cos(\alpha)$, sodass die Dreiteilung des Winkels $\alpha$ äquivalent zum Lösen der Gleichung 3. Grades $4t^3 - 3t = \cos(\alpha)$ ist. Durch Betrachten dieser Gleichung kann man zeigen, dass ein allgemeiner Winkel $\alpha$ **nicht** mittels Zirkel und Lineal dreigeteilt werden kann. Aber das ist eine Geschichte der Algebra...

$\boxed{8}$ *Oszillationen.*
Gegeben sind die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

(a) $f_1(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (b) $f_2(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (c) $f_3(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Skizziere die Graphen von $f_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und berechne $\lim_{x\to 0} f_i$.

$\boxed{9}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Trickkiste — Werte der Winkelfunktionen.*
Berechne **ohne** Taschenrechner (das ist die Herausforderung!) die exakten Werte von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ für

(a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ *Tipp:* $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$ oder verwende die Halbwinkelformeln.

(b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ *Tipp:* Setze $z = e^{i\pi/3}$ und verwende $z^3 + 1 = 0$.

# Blatt 8A: Nachtrag zu Stetigkeit

$\boxed{1}$ *Stetigkeit vs. gleichmäßge Stetigkeit.*
Betrachte die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

(a) Zeige direkt aus der $\varepsilon$-$\delta$-Definition der Stetigkeit, dass $f$ stetig (in jedem Punkt $x_0 \in (0, \infty)$) ist.

(b) Ist $f$ auch gleichmäßig stetig? Warum? Zeige deine Vermutung!

(c) Ist die Einschränkung von $f$ auf $[1, \infty)$ gleichmäßig stetig? Warum? Zeige deine Vermutung!

$\boxed{2}$ *Es liegt nicht an der Unbeschränktheit.*
Finde eine Funktion $f :\ (0, 1] \to \mathbb{R}$, die die stetig und (im Gegensatz zu $f(x) = 1/x^2$ in Aufgabe $\boxed{1}$) *beschränkt* aber nicht gleichmäßig stetig ist.
*Tipp:* Zacken wie in Vo. $\boxed{2}$ 1.15(i).

$\boxed{3}$ *Einseitige Grenzwerte & Grenzwert*
Sei $c \in (a, b)$, sei $f : (a, b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Beweise, dass

$$\lim_{x \searrow c} f(x) = \alpha = \lim_{x \nearrow c} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to c} f(x) = \alpha$$

gilt. (Insbesondere existiert also der Limes.)
*Tipp:* Die „Rückrichtung” ist einfach, weil die „erlaubten” Folgen $x_n$ in $(a, b)$ auf der linke Seite Spezialfälle der „erlaubten” Folgen auf der rechten Seite sind. Die „Hinrichtung” beweist sich am besten indirekt—und zwar wieder einmal mit der Konstruktion einer Ausnahmefolge aus der Annahme, dass die rechte Seite nicht gilt.

$\boxed{4}$ *Verständnisaufgabe: Stetige Bilder von Intervallen.*
Gegeben ist eine stetige Funktion

$$f : D = [-2, -1] \cup [1, 2] \to \mathbb{R}.$$

Welche der Aussagen über die Bildmenge $f(D)$ sind korrekt?

(1) Es gilt $f(D) = [f(-2), f(2)]$.

(2) $f(D)$ ist ein Intervall.

(3) Es gilt $f(D) = [f(-2), f(-1)] \cup [f(1), f(2)]$.

(4) $f(D)$ ist Vereinigung zweier Intervalle.

$\boxed{5}$ *Schnittstellenaufgabe: Fixpunktsatz anschaulich.*
Ziel dieser Aufgabe ist es, die Aussage des Fixpunktsatzes, Vo. Korollar 2.2.8 zu veranschaulichen und seinen Sinn und Zweck zu erklären. Er verrät einiges über das „Wesen der Mathematik"...

**Satz.** Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Dann besitzt $f$ einen Fixpunkt d.h. es existiert ein $x_0 \in [0,1]$ mit

$$f(x_0) = x_0.$$

(a) Veranschauliche die Aussage am Einheitsquadrat.

(b) Erkläre, wozu Fixpunktsätze gut sind. Was hat das mit der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu tun.

$\boxed{6}$ *Anwendung des Umkehrsatzes: Der Logarithmus zur Basis $a$.*
Für $a > 1$ betrachte die Funktion

$$f_a : \ \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad x \mapsto a^x.$$

(a) Skizziere den Graphen von $f_a$ und zeige (unter Zuhilfenahme der entsprechenden Eigenschaften von exp und log aus der Vorlesung), dass $f_a$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist.

(b) Ernte (soll heißen folgere) aus (i), dass die Umkehrfunktion von $f_a$

$$^a\log := (f_a)^{-1} : \ (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

stetig und streng monoton wachsend ist. Skizziere den Graphen von $^a\log$.

(c) Zeige folgende Formel

$$^a\log(x) \ = \ \frac{\log(x)}{\log(a)} \qquad (x \in (0, \infty)),$$

die $^a\log$ auf den natürlichen Logarithmus log zurückführt (und die dir eventuell noch aus der Schule vertraut ist).

$\boxed{7}$ *Schnittstellenaufgabe: Geometrische Konstruktion der Umkehrfunktion.*
Ein „Merksatz" der Schulmathematik, der dir vermutlich vertraut ist, lautet:

Die Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der 1. Mediane.

Tatsächlich kann man den Graphen der Umkehrfunktion einer bijektiven und (der Einfachheit halber) stetigen Funktion $f$ konstruieren, indem man den Graphen von $f$ an der 1. Mediane spiegelt.

Erkläre anhand einer Skizze, warum das so ist!

# Blatt 9: Differenzierbarkeit und Ableitung, Teil 1

**1** *Differenzierbarkeit—direkt aus der Definition.*
Zeige—direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit—dass die folgenden Funktionen (überall, d.h. auf ihrem gesamten Definitionsbereich) differenzierbar sind und berechne ihre Ableitung.

(a) (Die Identität als Aufwärmübung) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

(b) (Cosinus, vgl. Vo. 3.1.10(v)) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos(x)$

(c) (Inverse Potenzen) $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-n}$ für $\mathbb{N} \ni n \geq 1$
*Tipp:* $(y^n - x^n) = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^2 + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1})$

**2** *Differenzierbarkeit der Wurzel.*
Wir betrachten die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Zeige—direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit—dass $f$ auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

(b) Zeige—wiederum direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit—dass $f$ in $x = 0$ *nicht* differenzierbar ist. Fertige auch eine Skizze an.

**3** *Schnittstellenaufgabe: Differenzierbarkeit 1.*
Sind die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Berechne gegebenenfalls die Ableitung. Skizziere auch die Funktionsgraphen.

(a) $f_1(x) = \exp(x)\sin(x)$

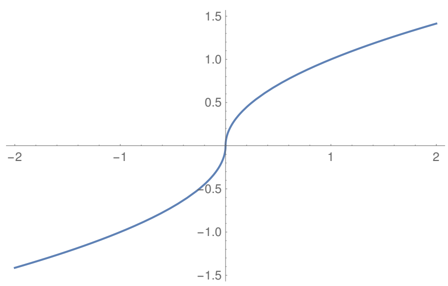
(b) $f_2(x) = x^4 \exp(x)$

(c) $f_3(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 7x - 11$

(d) (Polynom, allgemein) $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (n \in \mathbb{N},\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$

**4** *Verständnisaufgabe: Differenzierbarkeit der Wurzel, zum Zweiten.*
Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{falls } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$




die jedenfalls nach Aufgabe 2 auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist.

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Begründe!

(1) $f$ ist im Nullpunkt differenzierbar *und* die Tangnte im Nullpunkt ist die $x$-Achse.

(2) $f$ ist im Nullpunkt differenzierbar *und* die Tangnte im Nullpunkt ist die $y$-Achse.

(3) $f$ ist im Nullpunkt nicht differenzierbar *und* es gilt $\lim_{0\neq x\to 0} f'(x) = 0$.

(4) $f$ ist im Nullpunkt nicht differenzierbar *und* es gilt $\lim_{0\neq x\to 0} f'(x) = \infty$.

$\boxed{5}$ $\exp' = \exp$—*über Wald und Wiese.*
In Vo. 3.1.10(iv) haben wir gezeigt, dass $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und die bemerkenswerte Eigenschaft besitzt, dass $\exp' = \exp$ gilt.

Zeige, dass dieses Resultat auch hergeleitet werden kann, indem man die Exponentialreihe gliedweise (d.h. Term für Term) differenziert.

*Hinweis.* Wir werden später in der Vorlesung einen Satz kennenlernen, der diese Vorgehensweise „legalisiert". Genauer, eine konvergente Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n =: f(x)$ darf gliedweise differenziert werden, d.h. es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, x^{n-1} = f'(x)$.

$\boxed{6}$ *Schnittstellenaufgabe: Differenzierbarkeit 2.*
Für welche $x$ sind die folgenden Funktionen definiert, wo sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Berechne gegebenenfalls die Ableitung. Skizziere auch die Funktionsgraphen.

(a) $f_1(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ (b) $f_2(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1)$

(c) $f_3(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$ (d) $f_4(x) = x^{-3} + \dfrac{x-1}{x-2}$

$\boxed{7}$ *Nützliche Ableitungsregeln.*
Sei $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ eine differenzierbare Funktion. Für welche $x$ sind die Funktionen (a) $f_1(x) = \sqrt{f(x)}$ und (b) $f_2(x) = \log(f(x))$ differenzierbar? Berechne $f_i'$.

$\boxed{8}$ *Differenzierbarkeit 3.*
Für welche $x$ sind die folgenden Funktionen definiert, für welche $x$ sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Berechne gegebenenfalls die Ableitung. Skizziere auch die Funktionsgraphen.

(a) $f_1(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x+2}$ (b) $f_2(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 3 + 5x$

(c) $f_3(x) = x\log(x) - x$ (d) $f_4(x) = e^{2x+3}$

(e) $f_5(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$ (f) $f_6(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$

$\boxed{9}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Produktregel kreativ anwenden.*
Die reellen Funktionen $f, g : (-a,a) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Weiters gelte, dass $f(x)g(x) = x$ für alle $x \in (-a,a)$ und $f(0) = 0$. Zeige, dass dann $g(0) \neq 0$ gelten muss.

# Blatt 10: Differenzierbarkeit und Ableitung, Teil 2

$\boxed{1}$ *Schnittstellenaugfgabe: Tangente explizit.*
Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f$ in dem jeweils angegebenen Punkt $P$. Fertige eine Skizze an.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $P = (1, 1)$ (b) $f(x) = e^x$, $P = (0, 1)$ (c) $f(x) = \sin(x)$, $P = (0, 0)$

$\boxed{2}$ *Die Tangente als „beste" Gerade—warum $\frac{r(h)}{h} \to 0$?*
Ziel dieser Aufgabe ist es (noch einmal und explizit) zu sehen, in welchem präzisen Sinne die Tangente die bestapproximierende Gerade an eine differenzierbare Funktion ist und was das mit der besonderen Eigenschaft des ,,Fehlers" $\frac{r(h)}{h} \to 0$ aus Vo. Thm. 3.1.21 zu tun hat, vgl. auch Bem. 3.1.22.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $\xi \in \mathbb{R}$. Zeige bzw. bearbeite nacheinander die folgenden Punkte:

(a) Jede Gerade $g$ durch $(\xi, f(\xi))$ ist von der Form $g(x) = f(\xi) + \alpha(x - \xi)$.

(b) Gib den Fehler $r(h) = f(\xi + h) - g(\xi + h)$ der Approximation von $f$ durch die Gerade $g$ explizit in Termen von $f$ und $\alpha$ an.

(c) Es gilt $r(h) \to 0$ für $h \to 0$.
*Anmerkung.* Der Witz ist hier, dass die Aussagen für *jede* Gerade $g$ durch $(\xi, f(\xi))$ gilt! Außerdem bleibt die Aussage richtig, falls $f$ nur stetig in $\xi$ ist.

(d) Es gilt $\frac{r(h)}{h} \to 0$ $(h \to 0)$ genau dann, wenn $g$ die Tangente an $f$ in $\xi$ ist (d.h. falls $\alpha = f'(\xi)$ ist).

(e) Fertige eine Skizze an.

$\boxed{3}$ *Verständnisaufgabe: Differenzierbarkeit des Betrags, etc.*
Welche Argumentation ist korrekt? Begründe!

(1) Die Funktion $x \mapsto |x|^2$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ist differenzierbar, weil $x \mapsto |x|$ diffbar ist.

(2) Sie ist nicht differenzierbar, weil $x \mapsto |x|$ nicht differenzierbar ist.

(3) Sie ist differenzierbar, obwohl $x \mapsto |x|$ nicht differenzierbar ist.

(4) Keine der Aussagen ist korrekt.

$\boxed{4}$ *Differenzierbarkeit 4 — etwas ambitionierter.*
Für welche $x$ sind die folgenden Funktionen definiert, für welche $x$ sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Berechne gegebenenfalls die Ableitung. Skizziere auch die Funktionsgraphen.

(a) $f_1(x) = e^{\sin(x)}$ (b) $f_2(x) = \cos(\log(x))$
(c) $f_3(x) = \sin(e^{x^2})$ (d) $f_4(x) = \log\sqrt{1 + \sin^2(x)}$
(e) $f_5(x) = \sin^2\big(x^3 + \cos(x^2)\big)$ (f) $f_6(x) = \sqrt{x^2 + \cos^2(\sqrt{x})}$

$\boxed{5}$ *Differenzieren, auch etwas ambitionierter.*
Berechne die Ableitungen der Funktionen $f_i : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $a > 0$, eine fixe Zahl. Skizziere auch die Funktionsgraphen.

| | | |
|---|---|---|
| (a) $f_1(x) = a^x$ | (b) $f_2(x) = x^a$ | (c) $f_3(x) = x^x$ |
| (d) $f_4(x) = x^{(x^x)}$ | (e) $f_5(x) = (x^x)^x$ | (f) $f_6(x) = x^{(x^a)}$ |
| (g) $f_7(x) = x^{(a^x)}$ | (h) $f_8(x) = a^{(x^x)}$ | (i) $f_9(x) = a^{(a^a)}$ |

$\boxed{6}$ *Stetig differenzierbar?*
Gegeben sind die Funktionen, vgl. Vo. 3.1.32(iii), (iv)

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, d.h. dass $f$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist und die Ableitungsfunktion $x \mapsto f'(x)$ auf $\mathbb{R}$ stetig. Ist $f$ zweimal differenzierbar? Skizziere $f$ und $f'$.

(b) Zeige, dass $g$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Ist $g'$ auch stetig auf $\mathbb{R}$? Skizziere $g$ und $g'$ und, wo möglich, auch $g''$.

*Achtung:* Natürlich liegt der Hund in $x = 0$ begraben. Dort hilft uns *nur* die Definition der Differenzierbarkeit!

$\boxed{7}$ *Knicke und Sprünge.*

(a) Betrachte die sog. Knick-Funktion

$$x_+ := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x \geq 0. \end{cases}$$

Skizziere den Funktionsgraphen. In welchen Punkten ist $x_+$ stetig, in welchen differenzierbar? Was kann über die einseitigen Ableitungen bei $x = 0$ gesagt werden?

(b) Betrachte die (sog. Heaviside'sche) Sprungfunktion

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Skizziere den Funktionsgraphen, dann verifiziere die folgenden Aussagen

(i) $H$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $H'(x) = 0$ und daher dort auch stetig.
(ii) $H'$ ist stetig ergänzbar nach $x = 0$.
(iii) Trotzdem ist $H$ in $x = 0$ nicht differenzierbar, weil dort sogar unstetig.
(iv) Die nicht-Differenzierbarkeit von $H$ in $x = 0$ äußerst sich auch dadurch, dass der Differenzenquotient dort keinen Limes hat.
(v) Allerdings existiert die linksseitige Ableitung von $H$ in $x = 0$, die rechtsseitige aber nicht.

$\boxed{8}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Geglättete Knicke.*

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^{n+1} & x \geq 0. \end{cases}$

Zeige, dass $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ $n$-mal stetig differenzierbar aber nicht $(n+1)$-mal differenzierbar ist. Skizziere die Situation für $n = 4$.

*Tipp:* Der Schlüssel ist hier eine Formel für $f^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, \dots n+1,\ x > 0)$: $f^{(k)}(x) = (n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)x^{n+1-k}$ (unmittelbar einsichtig oder leichte Induktion). Damit lässt sich zeigen, dass $f^{(k)}(0)$ für $k = 1, 2, \dots n$ existiert und verschwindet und dass $f^{(n+1)}(0)$ nicht existiert.

# Blatt 11: Eigenschaften differenzierbarer Funktionen, 1

$\boxed{1}$ *Schnittstellenaufgabe: Kurvendiskussion.*
Bestimme für die folgenden Funktionen den (maximal möglichen) Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonieverhalten, lokale Extrema, Bereiche von Konvexität und Wendepunkte sowie Grenzwerte gegen den Rand des Definitionsbereichs bzw. gegen $\pm\infty$. Skizziere den Funktionsgraphen. Das Verwenden elektronischer Hilfsmittel ist hier explizit erwünscht!

(a) $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ (b) $x \mapsto x\, e^{-1/x}$

$\boxed{2}$ *Lokales und globales Maximum.*
Betrachte für ein fixes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n\, e^{-x}$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $f$ an einer einzigen Stelle, nämlich $x = n$ ihr globales Maximum annimmt und dies auch das einzige lokale Maximum von $f$ ist. Bearbeite dazu die folgenden Punkte.

(a) Um dir einen Überblick zu verschaffen, skizziere den Graphen von $f$ (für ein geeignetes $n$).

(b) Weil $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ (Beweis!) existiert $R$ sodass $f(x) < 1/e$ für alle $x > R$.

(c) Falls daher $f$ ein globales Maximum in $\xi \in \mathbb{R}$ hat, muss $\xi \in [0, R]$ gelten und es gibt tatsächlich ein solches $\xi$.

(d) $\xi$ muss sogar in $(0, R)$ liegen und daher ist Vo. Prop. 3.2.4 anwendbar.

(e) Berechne $\xi$ und zeige, dass es der einzige Punkt mit diesen Eigenschaften ist.

$\boxed{3}$ *Verständnisaufgabe: Formulierungen des Mittelwertsatzes.*
Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,b]$ stetig und auf $(a,b)$ differenzierbar. Welche der folgenden Formulierungen gibt die Aussage des Mittelwertsatzes korrekt wieder?

(1) Es gibt eine Stelle $\xi$ zwischen $a$ und $b$, an der die Steigung der Tangente an den Graphen von $f$ gleich dem Abstand zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ist.

(2) Es gibt eine Stelle $\xi$ zwischen $a$ und $b$, an der die Steigung der Tangente an den Graphen von $f$ gleich der Steigung der Gerade durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

(3) Es gibt eine Stelle $\xi$ zwischen $a$ und $b$, an der die Steigung der Tangente an den Graphen von $f$ gleich der Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(\xi, f(\xi))$ ist.

(4) (1) und (2) sind korrekt.

$\boxed{4}$ *Verständnisaufgabe: Mittelwertsatz.*
Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Was kann man über $f$ mit Sicherheit behaupten?

(1) Es gibt ein $\xi \in [0,1]$ mit $f'(\xi) = 0$.

(2) Es gibt ein $\eta \in [0,1]$ mit $f'(\eta) = 1$.

(3) Es gibt sowohl ein solches $\xi$ als auch ein solches $\eta$.

(4) Es muss weder ein solches $\xi$ noch ein solches $\eta$ geben.

$\boxed{5}$ *Zum Satz von Rolle und seinen Voraussetzungen.*
Wie in Vo. Bem. 3.2.11 diskutiert, sind die Voraussetzungen des Satzes von Rolle — und damit auch für den MWS — für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, nämlich $f$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $(a,b)$, teilweise redundant und können zu $f$ differenzierbar auf $(a,b)$ und $f$ stetig in $a$ und $b$ umformuliert werden. Diese Voraussetzungen sind gemeinsam mit $f(a) = f(b)$ aber notwendig, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Finde Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f$ differenzierbar auf $(a,b)$, $f(a) = f(b)$, aber $\nexists\ \xi$ mit $f'(\xi) = 0$.

(b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, aber es gibt kein $\xi$ mit $f'(\xi) = 0$.

(c) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) = f(b)$ aber es gibt kein $\xi$ mit $f'(\xi) = 0$.

$\boxed{6}$ *Globale Maxima.*
Bestimme alle globalen Maxima der Funktion

$$f(x) = \Big(3 + 4(x-1)^2\Big)\, e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Gibt es auch globale Minima? Warum bzw. warum nicht?
*Tipp:* Gehe wie in Aufgabe $\boxed{2}$ vor.

$\boxed{7}$ *Schnittstellenaufgabe: Kurvendiskussion 2.*
Bestimme für die folgenden Funktionen den (maximal möglichen) Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonieverhalten, lokale Extrema, Bereiche von Konvexität und Wendepunkte sowie Grenzwerte gegen den Rand des Definitionsbereichs bzw. gegen $\pm\infty$. Skizziere den Funktionsgraphen. Das Verwenden elektronischer Hilfsmittel ist wieder explizit erwünscht!

$$(a) \quad x \mapsto \log(x)/x \qquad\qquad (b) \quad x \mapsto (1+x)\sqrt{1-x^2}$$

$\boxed{8}$ *Schnittstellenaufgabe: Mittelwertsatz.*
Die folgende Aufgabe stammt aus dem Aufgabenheft zur SRDP (vulgo Zentralmatura) vom Haupttermin 2015, Teil 2 (Quelle: `https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=880&token=5b39a7b2537f1b9bc94fea6548f0626d6fa10569`). Bearbeite sie!

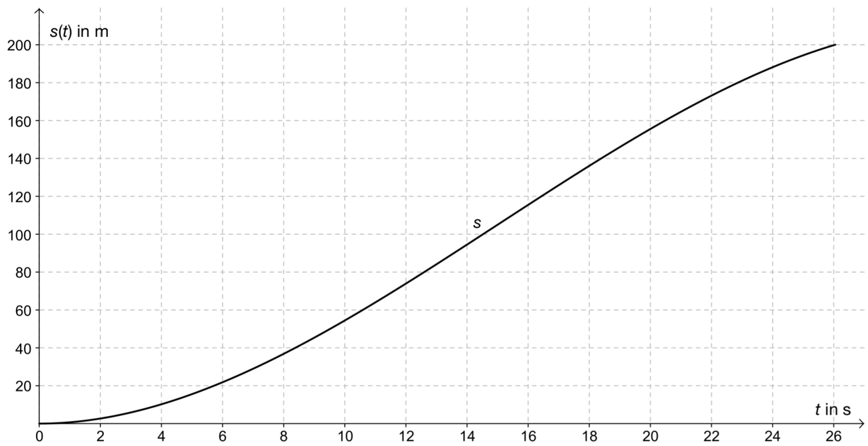
## Aufgabe 1

### 200-m-Lauf

In der Leichtathletik gibt es für Läufer/innen spezielle Trainingsmethoden. Dazu werden Trainingspläne erstellt. Es ist dabei sinnvoll, bei Trainingsläufen Teilzeiten zu stoppen, um Stärken und Schwächen der Läuferin/des Läufers zu analysieren.

Zur Erstellung eines Trainingsplans für eine Läuferin wurden die Teilzeiten während eines Trainingslaufs gestoppt. Für die 200 Meter lange Laufstrecke wurden bei diesem Trainingslauf 26,04 Sekunden gemessen. Im nachstehenden Diagramm ist der zurückgelegte Weg $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit $t$ für diesen Trainingslauf mithilfe einer Polynomfunktion $s$ vom Grad 3 modellhaft dargestellt.

Für die Funktion $s$ gilt die Gleichung $s(t) = -\frac{7}{450}t^3 + 0{,}7t^2$ ($s(t)$ in Metern, $t$ in Sekunden).




Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion $s$!

Interpretieren Sie die Bedeutung der Wendestelle in Bezug auf die Geschwindigkeit der Läuferin!

b) $\boxed{\text{A}}$ Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Läuferin für die 200 Meter lange Laufstrecke in Metern pro Sekunde!

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen in einem Intervall $[a; b]$ für eine Funktion $f$ mindestens ein $x_0 \in (a; b)$ existiert, sodass $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ gilt. Interpretieren Sie diese Aussage im vorliegenden Kontext für die Funktion $s$ im Zeitintervall $[0; 26{,}04]$!

5

öffentliches Dokument

# Blatt 12: Eigenschaften differenzierbarer Funktionen, 2

$\boxed{1}$ *Schnittstellenaufgabe: Kurvendiskussion 3.*
Bestimme für die folgenden Funktionen den maximal möglichen Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonieverhalten, lokale Extrema, Bereiche von Konvexität und Wendepunkte sowie Grenzwerte gegen den Rand des Definitionsbereichs bzw. gegen $\pm\infty$. Skizziere den Funktionsgraphen. Das Verwenden elektronischer Hilfsmittel ist wieder explizit erwünscht!

(a) $x \mapsto x^2\, e^{-1/x^2}$ (b) $x \mapsto x^x$

$\boxed{2}$ *Bedingungen für Extremstellen.*
Fasse die notwendige (Prop. 3.2.4) und die hinreichende (Kor. 3.2.20) Bedingung für lokale Extrema aus der Vorlesung zusammen. Gib jeweils ein neues — soll heißen ein anderes als in der Vorlesung — Beispiel dafür an, dass die erste Bedingung nicht hinreichend und die zweite nicht notwendig ist.

$\boxed{3}$ *Extrema des Cosinus.*
Bestimme alle lokalen Extrema der Cosinusfunktion.

$\boxed{4}$ *Regeln von de L'Hospital, praktisch.*
Berechne:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} \quad (\alpha > 0)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} x \log(x)$

(c) $\displaystyle\lim_{0\neq x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} x\, e^{1/x}$

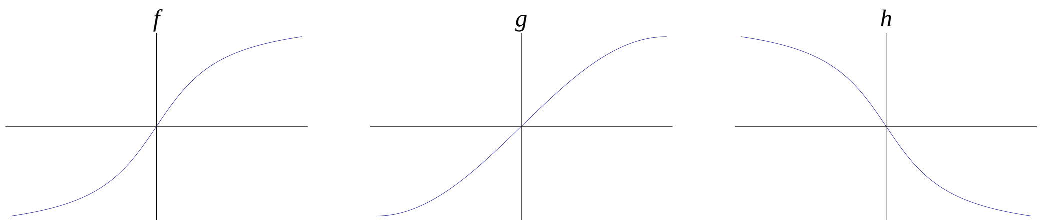
*Anmerkung:* Diese bzw. ganz ähnliche Grenzwerte haben wir schon in Bsp. 2.3.7 berechnet. Die Regel von de L'Hospital führt hier aber oft schneller zum Ziel!

$\boxed{5}$ *Funktionsverlauf gesucht.*
Von einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist folgendes bekannt:

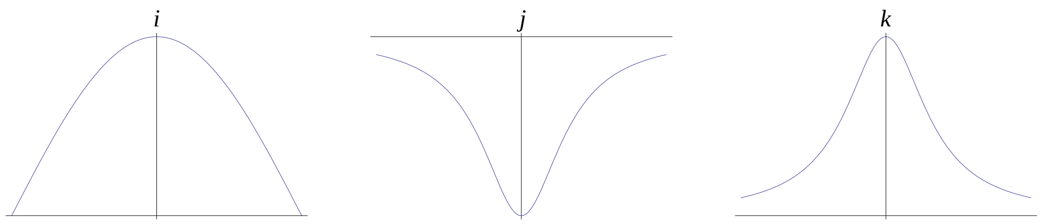
- $f'(x)$ ist negativ auf $(-3, 1)$ und nicht negativ sonst und
- $f''(x)$ ist negativ auf $(-4, -2)$ und nicht negativ sonst.

Fertige eine Skizze an, die einen möglichen Verlauf des Graphen von $f$ auf $[-6, 2]$ darstellt. Zeichne lokale Extrema und Wendestellen ein.

6 *Schnittstellenaufgabe: Ableitungspuzzle.*
Gegeben sind die Graphen der Funktionen $f$, $g$ und $h$.




Welche der Funktionen $i$, $j$, $k$ (Graphen siehe unten) ist die erste Ableitung von $f$, $g$ bzw. $h$? Warum?




7 *Funktionsverlauf möglich?*
Kann es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geben mit

- $f'(x)$ hat Nullstellen genau in den Punkten $-3$ und $0$ und
- $f''(x)$ hat Nullstellen genau in den Punkten $1$ und $3$?

*Tipp.* Versuche zuerst mittels einer Skizze eine solche Funktion zu finden. Der Verdacht, dass es so ein $f$ nicht geben kann, läßt sich durch Anwenden des Satzes von Rolle auf $f'$ erhärten...

8 *Bedingungen für Wendestellen.*

(a) Nach Vo. Bem. 3.2.27 ändert sich in einer Wendestelle das Krümmungsverhalten der Funktion (entweder von konvex auf konkav oder umgekehrt). Leite für dreimal differenzierbare Funktionen eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für Wendestellen (in Analogie zum Fall der Extrema) ab.

(b) Gib jeweils ein Beispiel, das zeigt, dass die notwendige Bedingung nicht hinreichend und die hinreichende nicht notwendig ist.

# Blatt 13: Integration

$\boxed{1}$ *Treppenfunktionen explizit.*

(a) Gib auf $[0, 1]$ zwei Treppenfunktionen an und zwei unstetige Funktionen, die keine Treppenfunktionen sind.

(b) Betrachte die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Gib explizit Treppenfunktionen $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ an, sodass

$$\psi_1 \leq \psi_2 \leq f \leq \varphi_2 \leq \varphi_1.$$

(c) Laut Vo. Thm. 4.1.11 gibt es ja Treppenfunktionen $\varphi, \psi$ auf $[0, 1]$ mit $\psi \leq f \leq \varphi$ und $\int_0^1 \varphi(t)\,dt - \int_0^1 \psi(t)\,dt \leq \frac{5}{16}$. Finde explizit ein solches Paar $\psi, \varphi$.

$\boxed{2}$ *Positiver und negativer Teil.*

(a) Wiederhole die Definitionen von $f^+$, $f_-$ und veranschauliche sie in einer Skizze.

(b) Weise die folgenden Formeln aus Vo. Bem. 4.1.18(ii) nach:

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_- = -\min(f(x), 0), \quad f = f^+ - f_-, \quad |f| = f^+ + f_-$$

(c) Beweise (ebenfalls Vo. Bem. 4.1.18(ii): $f \leq g \implies f^+ \leq g^+ \quad \text{und} \quad g_- \leq f_-$ und fertige eine Skizze an.

$\boxed{3}$ *Verständnisaufgabe: Riemannintegrierbarkeit.*
Gegeben ist die Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = 1/2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizziere den Graphen und betrachte die folgenden Aussagen. Welche sind richtig, welche falsch? Begründe!

Die Funktion $f$

(1) ist nicht integrierbar, weil sie weder stetig noch monoton ist.

(2) ist integrierbar, weil Oberintegral und Unterintegral übereinstimmen.

(3) ist nicht integrierbar, weil das Unterintegral gleich 0 ist und das Oberintegral gleich 1 ist.

(4) ist integrierbar, weil es Treppenfunktionen $\psi \leq f \leq \varphi$ gibt, deren Integrale beliebig nahe beieinander liegen.

$\boxed{4}$ *Der Mittelwertsatz der Integralrechnung als Werkzeug.*
Verwende den Mittelwertsatz der Integralrechnung, um die folgenden Integrale nach oben abzuschätzen, vgl. Vo. 4.1.21(ii):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx, \quad \int_0^1 4x^2+7\,dx, \quad \int_{-1}^{1} x\sin(1/x)^*\,dx, \quad \int_0^L \arctan(x)\,dx \ (L>0)$$

$\boxed{5}$ *Schnittstellenaufgabe: Grundintegrale.*
Bestimme (ohne auf die jeweiligen Gültigkeitsbereiche Rücksicht zu nehmen)

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(x)}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2(x)}$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{6}$ *Verständnisaufgabe: Der Witz beim Integrieren.*
In einem Schulbuch findet sich die Rechnung:

$$\int_0^1 x^2\,dx \;=\; \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 \;=\; \frac{1}{3}\big(1^3-0^3\big) \;=\; \frac{1}{3}\,.$$

Was ist die wesentliche Information, die in diese Rechnung eingeht?

(1) Das Integral $\int_0^1 x^2 dx$ ist der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $x \mapsto x^2$ im Intervall $[0,1]$.

(2) $x \mapsto x^3/3$ ist eine Stammfunktion von $x \mapsto x^2$.

(3) Die Integralfunktion $x \mapsto \int_0^x t^2 dt$ ist eine Stammfunktion ihres Integranden.

(4) Alle diese Aussagen gehen in die Rechnung ein.

$\boxed{7}$ *Integration, explizit.*
Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^2 x\log(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos(x)\,dx$ *Tipp:* Setze $x = t+\pi$.

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$ *Tipp:* Setze $x = t + \pi/2$.

---

$^*$Hier ist natürlich die stetige Fortsetzung von $x\sin(1/x)$ durch 0 in $x=0$ gemeint, vgl. Blatt 9 $\boxed{7}$(b).

$\boxed{8}$ *Verständnisaufgabe: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, vgl. Vo. Thm. 4.2.7, besagt für ein stetiges $f : I \to \mathbb{R}$ und $a < b \in I$, dass

(i) $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ stetig differenzierbar ist und $F' = f$ gilt,

(ii) $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ für jede Stammfunktion $G$ von $f$ gilt.

Welche der folgenden Aussagen über die Bedeutung des Hauptsatzes sind richtig, welche ungenau oder falsch? Begründe!

Der Hauptsatz besagt,

(1) dass Integrieren die Umkehrfunktion zum Differenzieren ist,

(2) dass Differenzieren und Integrieren im wesentlichen Inverse Operationen sind,

(3) wie das (bestimmte) Integral $\int_a^b f(t)dt$ explizit ausgerechnet werden kann; nämlich als Differenz einer (beliebigen) Stammfunktion an den Punkten $b$ und $a$,

(4) dass das (bestimmte) Integral $\int_a^b f(t)dt$ am besten über $F$ ausgerechnet werden kann,

(5) die Funktion $F$ eine Stammfunktion von $f$ ist,

(6) die Funktion $F$ die einzige Stammfunktion von $f$ ist.

$\boxed{9}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Summe von Treppenfunktionen.*
Führe den Beweis von Vo. Lemma 4.1.3(i) im Detail aus, d.h. beweise, dass die Summe zweier Treppenfunktionen auf $[a, b]$ wieder eine Treppenfunktion ist.

# Blatt 14: Vermischtes zum Differenzieren & Integrieren.

$\boxed{1}$ *Regeln von de L'Hospital, praktisch 2.*
Berechne $(a, b \in \mathbb{R})$:

(a) $\displaystyle\lim_{0\neq x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{0\neq x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{0\neq x\to 0} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x}$

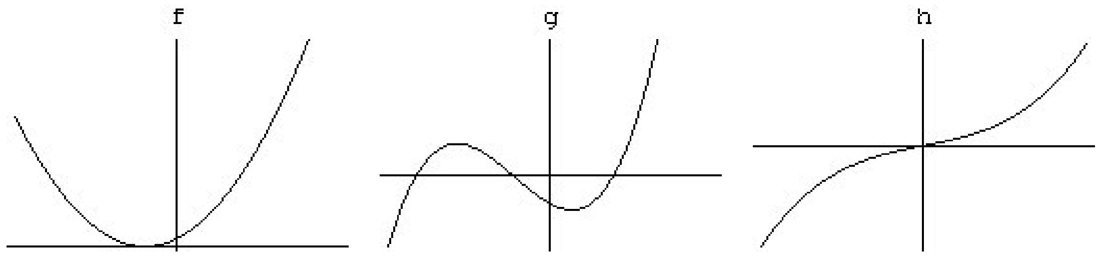
(d) $\displaystyle\lim_{0\neq x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log(1{+}1/x)$ (f) $\displaystyle\lim_{0\neq x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)}-\sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$

$\boxed{2}$ *Regeln von de L'Hospital—eine Warnung.*
Berechne $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

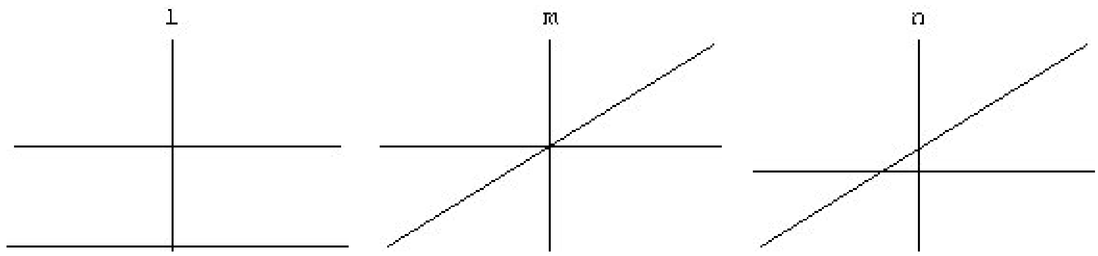
*Tipp:* Die Regel von de L'Hospital führt hier nicht zum Ziel (warum?). Hebe $e^x$ heraus.

$\boxed{3}$ *Kurvendiskussion 4.*
Sei $a > 0$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktion $p(x) = x^4 - 4ax^3$. Untersuche $p$ bezüglich Nullstellen, Monotonie und Extrema. Fertige eine Skizze des Funktionsgraphen an.

$\boxed{4}$ *Schnittstellenaufgabe: Ableitungspuzzle 2.*
Gegeben sind die Graphen der Funktionen $f$, $g$ und $h$.




Welche der Funktionen $l$, $m$, $n$ (Graphen siehe unten) ist die zweite Ableitung von $f$ $g$, bzw. $h$? Warum?



$\boxed{5}$ *Verständnisaufgabe: Stetig, monoton, integrierbar?*
Welches der folgenden Diagramme gibt die Inklusionen zwischen der Menge der stetigen Funktionen, der Menge der monotonen Funktionen und der Menge der integrierbaren Funktionen korrekt wieder? Begründe!

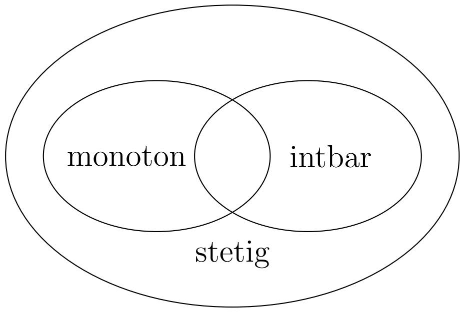



Diagramm A

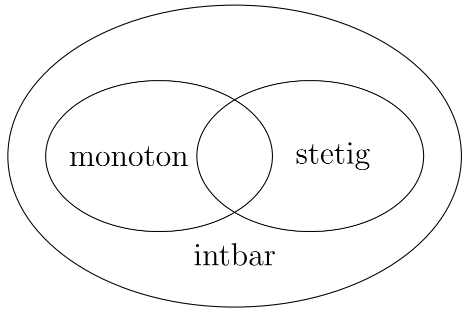



Diagramm B

(1) Diagramm A,

(2) Diagramm B,

(3) beide sind korrekt,

(4) keines von beiden ist korrekt.

$\boxed{6}$ *Verständnisaufgabe: Stammfunktionen des Cosinus.*
Welche der Ausagen über Sinus und Cosinus sind korrekt, welche nicht? Begründe!

(1) sin ist die einzige Stammfunktion zu cos.

(2) sin ist die einzige Stammfunktion zu cos, die im Nullpunkt den Wert 0 hat.

(3) Es gibt unendlich viele Stammfunktionen zu cos, die im Nullpunkt den Wert 0 haben.

(4) Keine dieser Aussagen ist wahr.

$\boxed{7}$ *Integration, explizit, 2.*
Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x\log(x)}$

*Tipp:*
Setze $u = \log(x)$.

(f) $\displaystyle\int x e^{x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

*Tipp:*
Setze $x = 2\tan(z)$.

$\boxed{8}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Nicht-verschwindendes Integral stetiger Funktionen.*
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion aber nicht die Nullfunktion. Zeige, dass dann

$$\int_a^b |f(t)|\, dt > 0$$

gilt. Fertige eine Skizze an!

*Hinweis.* Verwende Vo. Lemma 2.1.10, das besagt, dass eine stetige Funktion $f$, die in einem Punkt $\xi$ nicht verschwindet, schon auf einer ganzen Umgebung $U_\delta(\xi) = (\xi - \delta, \xi + \delta)$ nicht verschwindet. Genauer kann man – wie der Beweis von $\boxed{2}$ 1.10. zeigt – erreichen, dass $|f(x)| > |f(\xi)|/2 > 0$ auf $U_\delta(\xi)$.