NAME:		**MAT.NR.**	

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2022/23
1. Termin, 6.2.2023
GRUPPE B

Sonja Kramer, Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 18 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung“** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkte pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 18 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 18 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(18)	(4)	(8)	(6)	(18)	(36)	

Teil 1: Multiple-Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) Unter einer Grundvorstellung eines mathematischen Begriffs versteht man eine sinnstiftende inhaltliche Deutung dieses Begriffs.
   (b) Individuelle Grundvorstellungen können Ausgangspunkt der Unterrichtsgestaltung bzw. von Interventionen sein..
   (c) Grundvorstellungen eines mathematischen Begriffs werden durch eine rein fachmathematische Analyse gewonnen.
   (d) Sekundäre Grundvorstellungen sind immer individuell und daher nicht normativ.

2. (*Funktionsbegriff: Aspekte und Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt? Seien A und B Mengen, f und g Funktionen von A nach B.
   (a) Die Objektvorstellung beruht darauf, dass f jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet.
   (b) Der Zuordnungsaspekt beruht darauf, dass f jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet.
   (c) Eine gut ausgeprägte Objektvorstellung befördert ein gutes Verständnis der Definition der Summe zweier Funktionen gemäß
   $$(f+g)(a) := f(a) + g(a).$$
   (d) Die Zuordnungsvorstellung korreliert besonders stark mit dem Paarmengenaspekt.

3. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?
   (a) Wenn x Grenzwert von (x_n) ist, dann ist x auch Häufungswert von (x_n).
   (b) (x_n) ist beschränkt, falls es eine Konstante C gibt, sodass für alle Folgenglieder x_n gilt: $x_n \leq C$.
   (c) Wenn (x_n) beschränkt ist, dann hat (x_n) auch einen Limes.
   (d) Wenn (x_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann ist (x_n) schon beschränkt.

4. *(Grundvorstellungen zum Grenzwert.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Die Grenzwertdefinition ist eine überwiegend statische Formulierung.

   (b) Die Annäherungsvorstellung ermöglicht es besonders gut/schnell zu verstehen, warum Permutationen konvergenter Folgen wieder konvergieren — und zwar gegen denselben Grenzwert.

   (c) Die Annäherungsvorstellung zum Grenzwert ist eine vorwiegend dynamische Vorstellung.

   (d) Die Vorstellung vom potentiell Unendlichen korreliert besonders stark mit der ε-N-Definition des Grenzwerts.

5. (*Eigenschaften von Funktionen anschaulich.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Falls (der Graph von) f keine Knicke hat, dann ist f differenzierbar.

   (b) Ist f stetig, so hat (der Graph von) f keinen Sprung.

   (c) Ist f beschränkt, dann ist f auch schon stetig.

   (d) Wenn (der Graph von) f einen Sprung hat, dann ist f nicht differenzierbar.

6. (*Differenzierbarkeit.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Der Differenzenquotient $[f(x)-f(x_0)]/(x-x_0)$ von f in x_0 ist genau die relative Änderung von f im Intervall $[x, x_0]$ (bzw. $[x_0, x]$).

   (b) Konvergiert der Differenzenquotient von f in x_0 gegen einen endlichen Wert, so ist f in x_0 differenzierbar.

   (c) Falls f in x_0 differenzierbar ist, dann ist die Ableitung $f'(x_0)$ der Limes des Differenzenquotienten von f bei x_0 für $x_0 \to x$.

   (d) Ist f in x_0 differenzierbar, dann ist die Tangente an f in x_0 die globale Stützgerade von f.

2 Sätze & Resultate

7. *(Zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Das Intervallschachtelungsprinzip funktioniert für abgeschlossene und offene Intervalle gleichermaßen.

   (b) Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungswert.

   (c) Das Monotonieprinzip beruht auf der Vollständigkeit.

   (d) Im axiomatischen Zugang wird $\mathbb{R}$ aus den (ZFC)-Axiomen der Mengenlehre konstruiert.

8. (Resultate über Folgenkonvergenz.) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) (x_n) hat höchstens einen Grenzwert.

   (b) Konvergiert (x_n) gegen x und (y_n) gegen y und gilt $x_n < y_n$ für alle n, dann auch $x < y$.

   (c) Ist (x_n) unbeschränkt, so kann (x_n) trotzdem konvergieren.

   (d) Konvergiert (x_n) gegen x und (y_n) gegen y, dann auch $\frac{x_n}{y_n}$ und zwar gegen $\frac{x}{y}$.

9. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sind korrekt?

   (a) Sind alle Glieder x_n der Reihe positiv, dann divergiert die Reihe.

   (b) Falls die Reihenglieder die Bedingung $x_n \geq 1$ für alle n erfüllen, dann divergiert die Reihe.

   (c) Falls die Reihe konvergiert, dann muss auch die Folge der Reihenglieder x_n konvergieren.

   (d) Falls die Glieder eine Nullfolge bilden (d.h. $x_n \to 0$ gilt), dann konvergiert die Reihe.

10. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) Ist f in x_0 stetig, so ist f in x_0 auch differenzierbar.

   (b) Ist f differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und gilt $\lim_{x\nearrow 0} f'(x) = \lim_{x\searrow 0} f'(x)$, dann ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar.

   (c) Gilt für den Differenzenquotienten von f bei $x_0 = 0$, dass

   $$\lim_{h\searrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h\nearrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

   dann ist f in x_0 nicht differenzierbar.

   (d) Ist f monoton steigend, dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x.

11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Hat f hat in x_0 ein Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

   (b) Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x, dann ist f monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.

   (c) Hat f in x_0 keine waagrechte Tangente, dann hat f in x_0 auch keine Extremstelle.

   (d) Ist f streng monoton wachsend, dann ist f' überall positiv ist.

12. *(Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche der folgenden Aussagen über den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung sind korrekt? Der Haupsatz besagt (für stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$):

    (a) $\displaystyle \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$

    (b) $\displaystyle F(x) := \int_a^b f(t)\, dt$ ist eine Stammfunktion von f.

    (c) Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion und diese ist dann automatisch stetig differenzierbar.

    (d) Falls F (beliebige) Stammfunktion von f ist, gilt $\displaystyle \int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Konvergente Folgen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt und auch korrekt aufgeschrieben?

    (a) $\displaystyle \frac{x^n}{n!} \to e$ für $n \to \infty$.

    (b) $\displaystyle \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \to 2$.

    (c) $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^k = 0$.

    (d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \to 1 \ (a > 0)$.

14. *(Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) Für $|q| \leq 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum q^k$.

    (b) Die periodische Dezimalzahl $0.\bar{3}$ ist durch die geometrische Reihe

    $$0.3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

    gegeben.

    (c) Das Konvergenzprinzip für monotone beschränkte Folgen garantiert, dass alle Dezimalzahldarstellungen (d.h. Reihen der Form

    $$\sum_k (a_k)(10)^{-k}$$

    mit $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$) konvergieren.

    (d) $0.\bar{3} < 1/3$.

15. *(Eigenschaften von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) Die Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist beschränkt.

   (b) Die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ ist beschränkt.

   (c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ ist unstetig in $x_0 = 0$.

   (d) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -1/x^2$ gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

16. *(Kurvendiskussion.)* Welche der Aussagen für die folgenden Funktionen (jeweils mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$) sind korrekt?

   (a) $f(x) = x^3$ hat in $x = 0$ kein Extremum, obwohl dort die Tangente waagrecht ist.

   (b) $f(x) = x^4$ hat in $x = 0$ ein Minumum, weil $f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$ gilt.

   (c) Weil $f(x) = x^4$ in $x = 0$ ein Minimum hat, gilt $f'(0) = 0$.

   (d) $f(x) = x^5$ ist streng monoton steigend und daher gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x

17. *(Funktionseigenschaften explizit.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) $f(x) = 5x^4+2x^3-7x+5$ ist als Polynomfunktion auf ihrem gesamten maximalen Definitionsbereich $\mathbb{R}$ stetig.

   (b) $g(x) = \frac{3x^3+x^2+6}{7x^2+5}$ ist als rationale Funktion auf ihrem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{R}$ differenzierbar.

   (c) $h(x) = \cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ ist als Polynomfunktion differenzierbar.

   (d) $j(x) = e^{3x^2}$ ist nach der Kettenregel differenzierbar mit Ableitung $j'(x) = e^{3x^2}$.

18. *(Ableitung explizit.)* Wir betrachten die die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0, \infty))$ und die Rechnung

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (h \to 0).$$

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Die Rechnung zeigt, dass f in jedem $x > 0$ differenzierbar ist.

   (b) Die Rechnung, gemeinsam mit der Tatsache $\lim_{x\searrow 0} 1/\sqrt{x} = \infty$ zeigt, dass $\lim_{x\searrow 0} f'(x) = \infty$ gilt.

   (c) Die Überlegung in (18b) zeigt, dass f in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

   (d) Setzt man in obiger Rechnung $x = 0$ (und notwendiger Weise $h > 0$), dann zeigt sie, dass f in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

Teil 2: Offene Aufgaben

1 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Geometrische Reihe.*
   Wir betrachten die konvergente geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

   (a) Geben Sie den Grenzwert der Reihe an und berechnen Sie, ab welchem n die Partialsumme
   $$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
   um weniger als 1/8 vom Grenzwert abweicht. (1 Pkt)

   (b) Finden Sie eine geometrische Veranschaulichung für diese Reihe und stellen sie diese in einer Skizze dar. (1 Pkt)

   (c) Formulieren Sie in eigenen Worten die Tatsache, dass die Reihe gegen den in (a) berechneten Grenzwert konvergiert — und zwar im Kontext ihrer in (b) gewählten Veranschaulichung. (2 Pkte)

2 Aufgaben zur Fachdidaktischen Reflexion

1. *Zum Ableitungsbegriff.*
   Im Schulbuch Arbeitslehrbuch Mathematik 7/2 (E. Szirucsek et al.; Ueberreuter Verlag, Nachdruck, 1982) wird der Ableitungsbegriff wie folgt eingeführt:

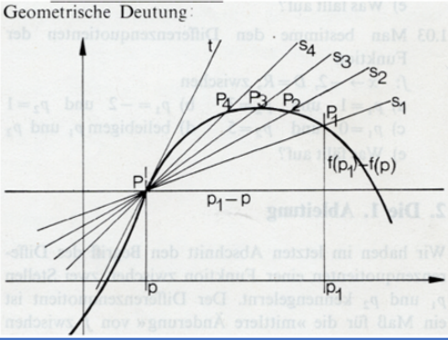
Allgemein: Man bestimme die 1. Ableitung einer Funktion f an der Stelle p. Wir betrachten die Funktion

$$k:\quad x \to \frac{f(x)-f(p)}{x-p},\ D = D_f \setminus \{p\}$$

Diese Funktion k ist überall definiert, wo die Funktion f definiert ist, außer an der Stelle p.
Die Funktion k kann an der Stelle p einen Grenzwert haben oder nicht.
Wenn der Grenzwert der Funktion k an der Stelle p existiert, so nennen wir diesen Grenzwert die **1. Ableitung der Funktion f an der Stelle p** und bezeichnen diese mit $f'(p)$. f heißt dann **differenzierbar** an der Stelle p.

Also: $f'(p) = \lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$

Geometrische Deutung:



Anstieg von s_1: $\quad k_1 = \frac{f(p_1)-f(p)}{p_1-p}$

Anstieg von s_2: $\quad k_2 = \frac{f(p_2)-f(p)}{p_2-p}$

....

Anstieg von t: $\quad k_t = \lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$

Die 1. Ableitung der Funktion f an einer Stelle p bedeutet geometrisch den Anstieg der Tangente in P. Dies wird durch die Anschauung nahegelegt. Genau genommen wird hier der Begriff der Tangente erst definiert.

Erklären Sie, über welchen Zugang der Ableitungsbegriff in diesem Schulbuch erarbeitet wird, und erläutern Sie die damit verbundenen Schwierigkeiten. Wie wird im vorliegenden Text mit diesen Schwierigkeiten umgegangen? Kommentieren Sie diese Vorgehensweise. (4 Pkte)

2. *Zum Grenzwertbegriff.*
Unter `https://www.studysmarter.de/schule/mathe/analysis/grenzwerte/` findet man folgende Definition für den Grenzwert:

> **Grenzwert Definition**
>
> Der Grenzwert kann bei Funktionen, Reihen und Folgen vorkommen und wird folgendermaßen definiert.
>
> > **Definition**
> >
> > Der **Grenzwert** ist ein Zahlenwert, welchem eine Funktion, Reihe oder Folge entgegenstrebt, ihn jedoch nie erreicht.
> >
> > Damit kann das Verhalten dieser beschrieben werden, hinsichtlich einer reellen Zahl oder der positiven oder negativen ∞.

Konzentrieren Sie sich bei der Bearbeitung der folgenden Aufgaben ausschließlich auf den Grenzwert von *Folgen*:

(a) Welche Grundvorstellung zum Grenzwert wird hier vorwiegend bedient und auf welche Vorstellung vom Unendlichen bezieht sich diese primär? (1 Pkt)

(b) Diese Definition ist in mehrfacher Hinsicht schlecht formuliert. Erläutern Sie dies anhand konkreter Beispiele und formulieren Sie die Definition entsprechend um. Verwenden Sie dazu die in (a) identifizierte Grundvorstellung. (3 Pkte)

3 Aufgaben zur Unterrichtspaxis

1. *Integralbegriff.*
Auf der folgenden Seite finden Sie Aufgabe 18 aus dem Teil 1 der standardisierten Reifeprüfung (AHS) vom 03.05.2022. Bearbeiten Sie dazu folgende Aufgaben:

(a) Lösen Sie die angeführte Aufgabe. Welche der beiden Grundvorstellungen (Flächeninhaltsgrundvorstellung oder Rekonstruktionsgrundvorstellung) wird vorrangig angesprochen? Diskutieren Sie! (2 Pkte)

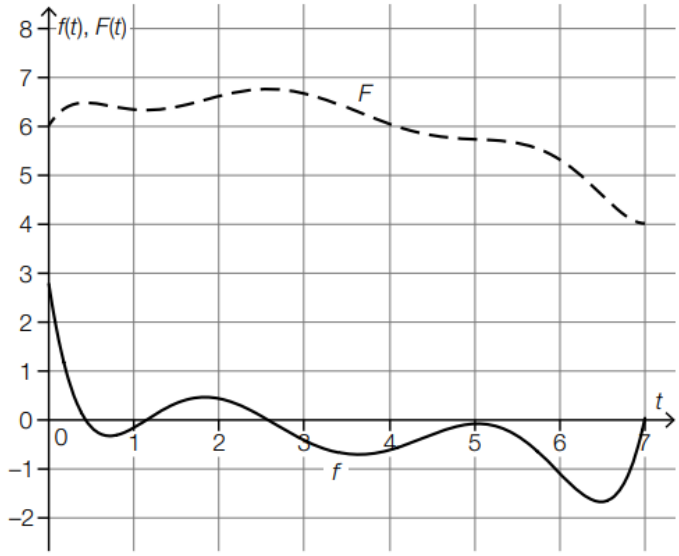
(b) Schüler Roland aus Ihrer Klasse erkennt nicht, wie die Funktion F aus der Funktion f entstehen kann, und welche Aussage zum Beispiel der Funktionswert $F(4)$ im gegebenen Sachzusammenhang hat. Formulieren Sie eine (explizite) Hilfestellung für Ihren Schüler. (2 Pkte)

(c) Finden Sie zu obiger Angabe aus der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung eine Übungsaufgabe für Ihre Schüler*innen (11. Schulstufe), die die erforderliche Grundvorstellung trainiert. (2 Pkte)

Die Funktion f beschreibt modellhaft die momentane Änderungsrate des Wasserstands eines bestimmten Gartenteichs in Abhängigkeit von der Zeit t.

t ... Zeit in Tagen
$f(t)$ ... momentane Änderungsrate des Wasserstands zum Zeitpunkt t in mm/Tag

Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Das Integral $\int_0^7 f(t)\,dt$ hat den Wert ______①______ und beschreibt die ______②______ des Wasserstands im Zeitintervall [0; 7].

①	
2	☐
–2	☐
0	☐

②	
mittlere Änderungsrate	☐
relative Änderung	☐
absolute Änderung	☐

Abbildung 1: Aufgabe 18 aus Teil 1 der SRDP (AHS) vom 3.5.2022.