NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2022/23
2. Termin, 13.4.2023
GRUPPE A

Sonja Kramer, Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 18 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung"** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkte pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 18 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 18 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(18)	(4)	(9)	(5)	(18)	(36)	

Teil 1: Multiple-Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) Sekundäre Grundvorstellungen stellen eine Verbindung zu anderen (schon bestehenden) mathematischen Begriffen her.
   (b) Individuelle Grundvorstellungen zu einem mathematischen Begriff sind normativ und Ziel des Unterrichts.
   (c) Eine Grundvorstellung beleuchtet einen mathematischen Begriff aus allen fachlich relevanten Perspektiven.
   (d) Unter einem Aspekt eines mathematischen Begriffs versteht man seine umfassende mathematische Beschreibung.

2. (*Wintersche Grunderfahrungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) In den drei Winterschen Grunderfahrungen manifestiert sich der allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterrichts.
   (b) Die 2. Wintersche Grunderfahrung („Mathematische Welt") kann vor allem im Zusammenhang mit Anwendungen vermittelt werden.
   (c) Durch intuitives Arbeiten mit Grenzwerten kann die 3. Wintersche Grunderfahrung („Heuristische Fähigkeiten") im Kontext der Analysis gut vermittelt werden.
   (d) Im Kontext der Winterschen Grunderfahrungen (G1) („Mathematischer Blick") und (G3) wird Mathematik als Prozess erlebbar.

3. (*Graph einer Funktion.*) Welche Aussagen sind korrekt? Der Graph $G(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist
   (a) die Menge aller geordneten Paare $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$.
   (b) eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
   (c) das Produkt aus Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und Bildmenge $f(\mathbb{R})$.
   (d) die Menge $G(f) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}\}$.

4. (*Zum Folgenbegriff.*) Wir betrachten die Definition des Folgenbegriffs (Eine reelle Folge x ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Diese Definition
   (a) stützt sich vor allem auf den Zuordnungsaspekt.
   (b) bedient den Iterationsaspekt gar nicht.
   (c) kann gut mit dem Aufzählungsaspekt in Verbindung gebracht werden.
   (d) erleichtert den Aufbau der Kovariationsvorstellung.

5. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) Nur weil (x_n) divergiert, muss (x_n) nicht unbeschränkt sein.

   (b) Wenn (x_n) keinen Häufungswert hat, dann divergiert (x_n).

   (c) Wenn (x_n) einen Häufungswert hat, dann ist (x_n) unbeschränkt.

   (d) Wenn (x_n) unbeschränkt ist, dann ist (x_n) sicherlich uneigentlich konvergent (bestimmt divergent).

6. (*Grundvorstellungen und Aspekte des Ableitungsbegriffs.*) Welche der folgenden Aussagen zu Grundvorstellungen und Aspekten des Ableitungsbegriffs sind korrekt?

   (a) Der (fach)mathematisch wichtigste Aspekt ist der der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten.

   (b) Zur Grundvorstellung der Tangentensteigung gehört die Entwicklung der Vorstellung von Tangenten als Schmieggeraden.

   (c) Zur Grundvorstellung der Tangentensteigung gehört die Entwicklung der Vorstellung, dass die Tangente lokal die Richtung einer Kurve angibt.

   (d) Die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate ist hauptsächlich mit dem Aspekt der lokalen linearen Approximation verbunden.

2 Sätze & Resultate

7. *(Rund um die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Die Ordnungsvollständigkeit kann ohne Bezugnahme auf den Folgenbegriff formuliert werden.

   (b) Das Monotonieprinzip besagt, dass jede beschränkte reelle Folge konvergiert.

   (c) Das Intervallschachtelungsprinzip funktioniert für offene und abgeschlossene Intervalle gleichermaßen.

   (d) Der axiomatische Zugang zu den reellen Zahlen umgeht die Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus den ZFC-Axiomen der Mengenlehre indem der Satz von Dedekind zur Definition gemacht wird.

8. (Resultate über Folgenkonvergenz.) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) Eine konvergente Folge (x_n) hat genau einen Grenzwert.

   (b) Konvergiert (x_n) gegen x und (y_n) gegen y und gilt $x_n < y_n$ für alle n, dann auch $x \le y$.

   (c) Ist (x_n) beschränkt, so hat (x_n) einen Limes.

   (d) Der Grenzwert von reellen Folgen respektiert Linearkombinationen.

9. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sind korrekt?

   (a) Sind alle Glieder x_n der Reihe positiv, dann kann die Reihe trotzdem konvergieren.

   (b) Falls $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, dann konvergiert die Reihe.

   (c) Falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass alle Reihenglieder x_n die Bedingung $x_n \geq C$ erfüllen, dann divergiert die Reihe.

   (d) Falls die Reihe konvergiert, dann muss die Folge der Reihenglieder x_n eine Nullfolge sein.

10. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) Ist f stetig, so ist f auch beschränkt.

   (b) Ist f stetig, dann gilt $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = f(1)$.

   (c) Ist f differenzierbar, dann ist f auch stetig.

   (d) Ist f differenzierbar und hat in $x = \frac{1}{2}$ ein lokales Minimum, dann gilt $f'(\frac{1}{2}) = 0$.

11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Am Vorzeichen von f' lässt sich die Monotonie von f ablesen.

   (b) Jede Nullstelle von f'' ist ein Wendepunkte von f.

   (c) Hat f in x_0 eine waagrechte Tangente, dann hat f in x_0 eine Extremstelle.

   (d) Ist f streng monoton wachsend, dann ist f' überall nicht-negativ.

12. *(Zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Jedes stetige $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ hat eine Stammfunktion.

   (b) Für jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' \equiv \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

   (c) Für jedes stetige $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kann mittels der Formel

$$F(x) = \int_a^b f(t)dt$$

   eine Stammfunktion gewonnen werden.

   (d) Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x).$$

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Nullfolge.)* Klarerweise konvergiert die Folge

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 1)$$

gegen 0. Aber welche der folgenden Argumente dafür sind schlüssig?

(a) Für beliebiges $\varepsilon > 0$ brauchen wir nur $N = 1/\varepsilon^2$ zu wählen, denn dann gilt für alle $n > N$, dass $x_n < \varepsilon$ ist.

(b) Für beliebiges $\varepsilon > 0$ brauchen wir nur $N = 1/\sqrt{\varepsilon}$ zu wählen, denn dann gilt für alle $n > N$, dass $x_n < \varepsilon$ ist.

(c) Weil die Wurzelfunktion stetig ist und $1/n$ eine Nullfolge, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 0.$$

(d) Es gilt

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

und daher mit dem Sandwich-Lemma $1/\sqrt{n} \to 0$.

14. *(Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ divergiert.

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}$.

15. *(Konvergente Folgen & Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt und auch korrekt aufgeschrieben?

(a) $\displaystyle\frac{2^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty)$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$.

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \to 0$.

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \to 1$.

16. *(Maxima und Minima von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) Die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat ein globales Maximum.
   (b) Die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat ein lokales Maximum.
   (c) Die Funktion $f : (0, 1]$, $f(x) = 1/x$ hat ein lokales Maximum.
   (d) Die Funktion $f : (0, 1]$, $f(x) = 1/x$ hat ein lokales Minimum.
17. *(Wurzelfunktion & Ableitung.)* Wir betrachten die folgende Rechnung
$$\sqrt{28} = \sqrt{25+3} \approx \sqrt{25} + \frac{3}{2\sqrt{25}} = 5 + \frac{3}{10} = 5.3$$
   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) Die Überlegung ist korrekt, sie verwendet folgende Tatsache über differenzierbare Funktionen und kleine h:
$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h.$$
   (b) Die Überlegung wäre korrekt, wenn nicht beim vorletzten Gleichheitszeichen ein Rechenfehler passiert wäre.
   (c) Die Überlegung ist nicht korrekt. Das sieht man auch an der relativ großen Differenz zwischen der Näherung $\sqrt{28} \approx 5.3$ und dem auf 8 Nachkommastellen genauen Wert[1] 5.29150262.
   (d) Die Überlegung ist korrekt. Sie verwendet die Tatsache, dass die Wurzelfunktion als (in $x = 25$) differenzierbare Funktion (nahe $x_0 = 25$) gut durch ihre Tangente approximiert wird.
18. *(Gestückelte Funktion.)* Wir betrachten die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$
   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) f ist stetig auf $\mathbb{R}$.
   (b) f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   (c) f ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$, aber f' ist unstetig in $x_0 = 0$.
   (d) f ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, weil der Graph dort einen Knick hat.

[1] Dieser Wert ist korrekt!

Teil 2: Offene Aufgaben

1 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Die Tangente als lineare Bestapproximation.*
   In untenstehender Abbildung ist der Graph einer reellen Funktion f (blau) dargestellt und das Geradenbüschel durch einen Punkt $(x_0, f(x_0))$. Unter allen diesen Geraden (schwarz) ist die Tangente t (rot) die „Bestapproximierende".

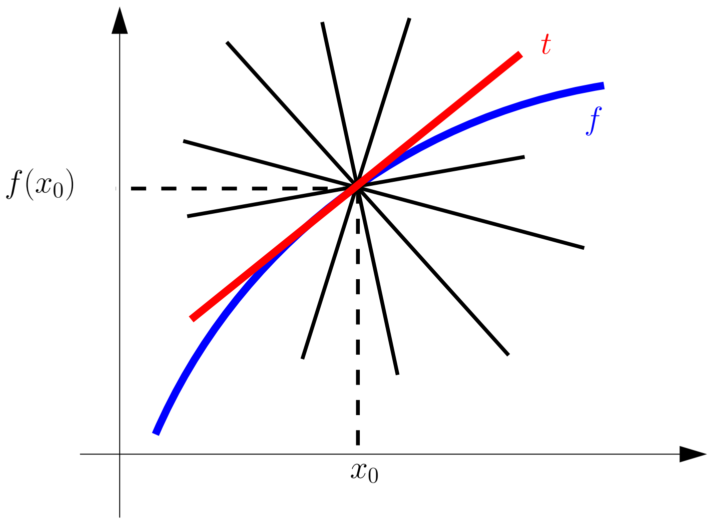


Abbildung 1: Die Tangente als Bestapproximiernde im Geradenbüschel.

   (a) Formulieren Sie einen schüler*innengerechten Text (7 Kl. AHS), indem Sie erklären, dass es die charakterisierende Eigenschaft der Tangente ist, dass der relative Fehler zwischen Tangente/Gerade und Funktion im Limes $x \to x_0$ gegen Null geht (und nicht nur der absolute Fehler). (2 Pkte)

   (b) Formulieren Sie das entsprechende mathematische Resultat, das obige Überlegungen präzisiert. (2 Pkte)

2 Aufgaben zur Fachdidaktischen Reflexion

1. *Aspekte zum Folgenbegriff.*
   Im Schulbuch Mathematik 6 (S. Goetz et al.; Öbv Verlag, 2010) wird der Folgenbegriff wie folgt eingeführt:

Eine Abfolge von Zahlen $\langle x_1; x_2; x_3; \ldots\rangle$ heißt eine **(unendliche) Zahlenfolge** $\langle x_n\rangle$, wenn ein „Bildungsgesetz" bekannt ist, welches es gestattet, zu jeder natürlichen Zahl $n = 1, 2, 3, \ldots$ das zugehörige Folgenglied anzugeben. x_1 heißt das erste Glied der Folge, x_2 das zweite usw. x_n heißt das n-te oder „allgemeine" Glied der Folge. Die natürliche Zahl n heißt der **(Zähl-)Index** des Folgengliedes x_n; dieser Index zeigt an, das wievielte Glied der Folge gemeint ist.

Bemerkungen:

1) Nach dieser Definition können Folgen als jener „spezielle Typ" von Funktionen aufgefasst werden, bei dem die Definitionsmenge $\mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}^*$) ist. Mit anderen Worten: bei dem jeder natürlichen Zahl n (dem Index) eine reelle Zahl x_n (ein Folgenglied) zugeordnet wird. Alles, was wir daher in der 5. Klasse über Funktionen gelernt haben, kann hier „übernommen" werden. **Erläutere!**

(a) Laut dieser Definition gehört zu einer Folge ein Bildungsgesetz. Diskutieren Sie, ob eine Folge ein Bildungsgesetz benötigt. Führen Sie dazu entsprechende Argumente oder Gegenbeispiele an. (2 Pkte)

(b) Erläutern Sie, ob und wie die drei Aspekte des Folgenbegriffs (Aufzählungsaspekt, Zuordnungsaspekt und Rekursionsaspekt) in der angeführten Darstellung im Schulbuch angesprochen werden. (3 Pkte)

2. *NEW-Merkregel.*
   Auf die Frage

   > Was ist die NEW-Merkregel?

   findet man im Online-Forum *gutefrage* (`https://www.gutefrage.net/frage/was-ist-die-new--merkregel`) die nachstehende Antwort:

[redacted]

Experte Mathematik, Mathe

vor 6 Jahren

N steht für Nullstelle, E für Extrempunkt und W für Wendepunkt.

N E W
  N E W
    N E W

Die erste Zeile stellt die Ausgangsfunktion dar, die zweite die erste Ableitung und die letzte die zweite Ableitung.

Eine Nullstelle in der ersten Ableitung ist ein Extrempunkt in der Ausgangsfunktion. Eine Nullstelle in der zweiten Ableitung ist ein Extrempunkt in der ersten Ableitung und somit ein Wendepunkt in der Ausgangsfunktion. Ein Extrempunkt in der zweiten Ableitung ist ein Wendepunkt in der ersten Ableitung. (...)

Ich hoffe, ich konnte dir helfen; wenn du noch Fragen hast, nur her damit! :)

(a) Diskutieren Sie die mathematische Korrektheit dieser Antwort und erläutern Sie die Vor- und Nachteile der NEW-Regel. (2 Pkte)

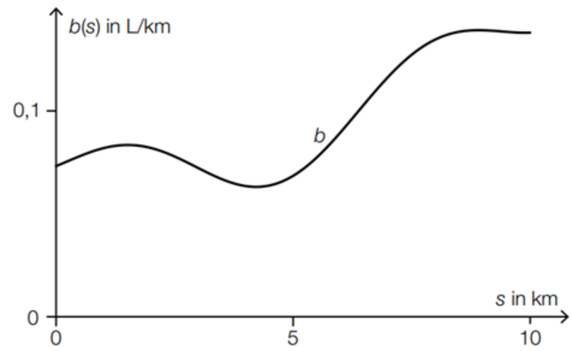
(b) Formulieren Sie eine sowohl aus fachdidaktischer Sicht hilfreiche, als auch aus fachmathematischer Sicht korrekte Antwort auf die gestellte Frage. (2 Pkte)

3 Aufgaben zur Unterrichtspaxis

1. *Integralbegriff.*
   Im Folgenden finden Sie Aufgabe 17 aus dem Teil 1 der standardisierten Reifeprüfung (AHS) vom 17.09.2021.

Benzinverbrauch bei der Fahrt auf einer Landstraße

Maria fährt mit ihrem Auto auf einer Landstraße eine Strecke von 10 km.
Die Funktion b gibt den momentanen Benzinverbrauch $b(s)$ (in L/km) in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke s (in km) seit Beginn der Fahrt an (siehe nachstehende Abbildung).



Der Ausdruck V hat die Einheit L/km und wird mithilfe der nachstehenden Formel berechnet.

$$V = \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} b(s)\,\mathrm{d}s$$

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie V im gegebenen Sachzusammenhang.

Abbildung 2: Aufgabe 17 aus Teil 1 der SRDP (AHS) vom 17.09.2021.

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben:

(a) Lösen Sie die angeführte Aufgabe. Welche der drei Grundvorstellungen (Flächeninhaltsgrundvorstellung, Rekursionsgrundvorstellung und Mittelwertsgrundvorstellung) wird vorrangig angesprochen? Diskutieren Sie. (2 Pkte)

(b) Zeigen Sie anhand eines Unterrichtsgangs mit konkreten Beispielen, wie Sie Ihre Schülerinnen und Schüler unterstützen können, die angesprochene Grundvorstellung aufzubauen. (3 Pkte)