NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2022/23
3. Termin, 21.6.2023
GRUPPE A

Sonja Kramer, Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 18 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung“** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkte pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 18 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 18 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(18)	(5)	(7)	(6)	(18)	(36)	

Teil 1: Multiple-Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) Unter einem Aspekt eines mathematischen Begriffs versteht man eine sinnstiftende inhaltliche Deutung dieses Begriffs.
   (b) Der Begriff der Grundvorstellung kann sowohl normativ als auch deskriptiv verwendet werden.
   (c) Zu jedem Aspekt eines mathematischen Begriffs gibt es jeweils genau eine Grundvorstellung.
   (d) Normative Grundvorstellungen werden durch eine fachdidaktische Analyse des jeweiligen mathematischen Begriffs gewonnen.

2. (*Wintersche Grunderfahrungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) Grunderfahrungen beziehen sich speziell auf eine spezifische Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff.
   (b) Die 1. Wintersche Grunderfahrung („mathematischer Blick") wird im Kontext der Analysis z. B. bei Modellierungen mit Hilfe des Ableitungsbegriffs gestärkt.
   (c) Die 2. Wintersche Grunderfahrung („mathematische Welt") kann z. B. als Rechtfertigung für das Unterrichten von Inhalten wie Grenzwertsätzen und Ableitungsregeln dienen.
   (d) Die 3. Wintersche Grunderfahrung („Heuristische Fähigkeiten") bezieht sich vorwiegend auf konkrete Anwendungen der Mathematik im Alltag.

3. (*Graph einer Funktion.*) Welche Aussagen sind korrekt? Der Graph $G(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   (a) ist eine Menge von geordneten Paaren.
   (b) ist die Menge aller geordneten Paare $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$.
   (c) kann z. B. die beiden Paare $(0, 1)$ und $(0, 2)$ enthalten.
   (d) kann niemals die Paare $(0, 1)$ und $(1, 1)$ enthalten.

4. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?
   (a) Wenn (x_n) konvergent ist, dann ist (x_n) auch beschränkt.
   (b) Wenn (x_n) nach unten beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.
   (c) Wenn (x_n) monoton fallend ist, dann ist (x_n) nach oben beschränkt.
   (d) Wenn (x_n) monoton ist, dann ist (x_n) auch beschränkt.

5. (*Vorstellungen zum Grenzwertbegriff*) Wir betrachten die Aussage:

> Jede Permutation einer konvergenten Folge ist wieder konvergent, und zwar gegen denselben Grenzwert.

(Unter einer Permutation einer Folge versteh man eine neue Folge, die man aus der alten erhält, indem man die Reihenfolge beliebig vieler Glieder beliebig verändert.)

Welche der folgenden Argumentationen sind korrekt?

(a) Die Aussage ist falsch. Es können ja beliebig viele (also möglicherweise z. B. fast alle) Glieder geändert werden.

(b) Der erste Teil der Aussage ist korrekt, der zweite aber falsch. Der Grenzwert der permutierten Folge kann sich ändern. Ein Beispiel dafür ist $x_n = 1/n$ und als permutierte Folge $y_n = 1 - 1/n$.

(c) Die Aussage ist korrekt. Unendlich viele Folgenglieder liegen in jeder ε-Umgebung um den Grenzwert der ursprünglichen Folge und daher nach der Permutation auch unendlich viele Folgenglieder der permutierten Folge. Somit hat sie denselben Limes.

(d) Die Aussage ist korrekt. Außerhalb jeder ε-Umgebung des Grenzwerts der ursprünglichen Folge liegen nur endlich viele Folgenglieder der ursprünglichen Folge. Daher liegen auch nach der Permutation nur endlich viele Folgenglieder nun der permutierten Folge außerhalb dieser Umgebung und sie konvergiert daher gegen denselben Grenzwert.

6. (*Zur Differenzierbarkeit.*) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Kann man den Graphen von f in einem durchzeichnen, dann ist f differenzierbar.

(b) Ist f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so hat ihr Graph dort keinen Knick.

(c) Ist f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so hat ihr Graph dort keinen Sprung.

(d) Ist f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 eine waagrechte Tangente.

2 Sätze & Resultate

7. (*Rund um die Vollständigkeit von* $\mathbb{R}$*.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Weil jede reelle Cauchy-Folge konvergiert, ist $\mathbb{R}$ vollständig.

(b) Jede nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.

(c) Jede monotone reelle Folge konvergiert.

(d) Weil jede nach oben beschränkte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum hat, ist $\mathbb{R}$ (ordnungs)vollständig.

8. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sind korrekt?

   (a) Sind alle Glieder x_n der Reihe positiv, dann kann die Reihe nicht konvergieren.

   (b) Falls $x_n \not\to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, dann divergiert die Reihe.

   (c) Falls $|x_n| \leq 1/n$ für alle n gilt, dann konvergiert die Reihe.

   (d) Falls die Reihe konvergiert, dann gilt $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

9. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) Ist f stetig, so ist f auch beschränkt.

   (b) Ist f stetig, so nimmt f Maximum und Minimum an.

   (c) Ist f stetig, dann ist f auch differenzierbar.

   (d) Ist f stetig, dann ist f auch integrierbar.

10. *(Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

    (a) Ist f stetig, so hat f auch eine Stammfunktion.

    (b) Die Ableitungen zweier verschiedener Stammfunktionen von f stimmen bis auf eine (additive) Konstante $C \neq 0$ überein.

    (c) Zwei verschiedene Stammfunktionen von f unterscheiden sich durch eine (additive) Konstante $C \neq 0$..

    (d) Hat f eine Stammfunktion, dann ist f auch differenzierbar.

11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

    (b) Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

    (c) Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, dann ist die Tangente von f in x_0 waagrecht.

    (d) Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, dann gibt es eine Umgebung U von x_0 sodass $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \neq x_0$ in U gilt.

12. *(Zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Jedes integrierbare $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat eine Stammfunktion.

   (b) Für jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt
   $$\frac{d}{dt} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

   (c) Für jedes stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann mittels der Formel
   $$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
   eine Stammfunktion gewonnen werden.

   (d) Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt
   $$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Grenzwerte von Folgen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) $\frac{2^n}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$.

   (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für alle $a > 0$.

   (c) $\frac{3n^2 + 4n + 7}{4n^2 + n - 4} \to -\frac{7}{4} \ (n \to \infty)$.

   (d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

14. *(Eigenschaften von Funktionen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Polynomfunktionen sind beliebig oft differenzierbar.

   (b) Die Ableitung von $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ kann nach der Produktregel wie folgt berechnet werden:
   $$(x^2)' = (x \cdot x)' = (1 \cdot x) + (x \cdot 1) = 2x.$$

   (c) Die Sinusfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = 0$.

   (d) Die Ableitung der Tangensfunktion kann aus der Quotientenregel wie folgt berechnet werden:
   $$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 - \tan^2(x).$$

15. *(Grenzwerte von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt?

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty.$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty.$

(d) $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{1}{x} = \infty.$

16. *(Kurvendiskussion.)* Welche der Aussagen für die folgenden Funktionen sind korrekt?

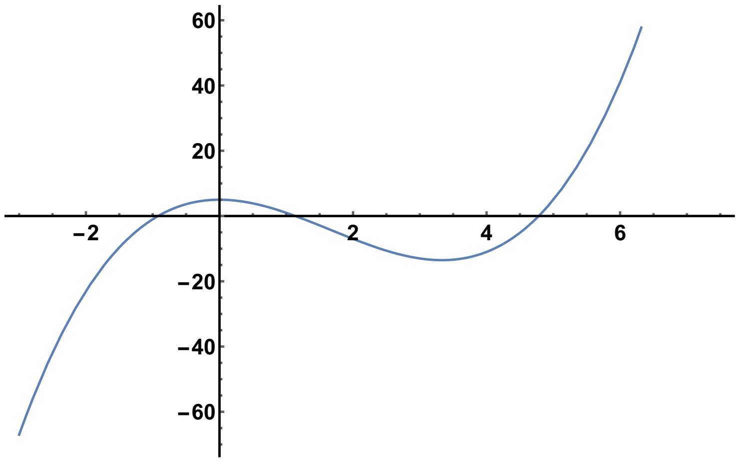
(a) $f(x) = 2x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ hat in $x = 0$ eine Nullstelle und eine Nullstelle der Ableitung.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ hat für alle $x \geq 0$ die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq 0$ und ist daher für alle $x \geq 0$ monoton wachsend.

(c) $f(x) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ hat Nullstellen in $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ und daher hat die Cosinusfunktion dort jeweils Extremstellen.

(d) Für die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ gilt $f'(x) = e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher hat f keine Extremstellen.

17. *(Graphische Kurvendiskussion, 1.)* Wir betrachten die Funktion f mit dem abgebildeten Graphen:



Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) f hat im Intervall $[-2, 6]$ zwei lokale Extrema.

(b) f hat im Intervall $[-2, 6]$ eine Wendestelle.

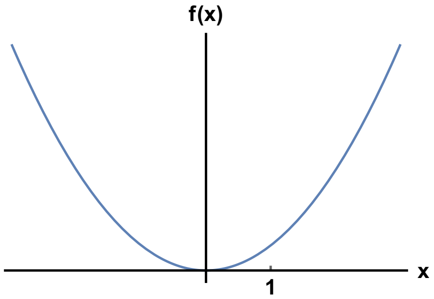
(c) f' ist im Intervall $[-2, 2]$ positiv.

(d) f' ist im Intervall $[-2, 0]$ nicht negativ.

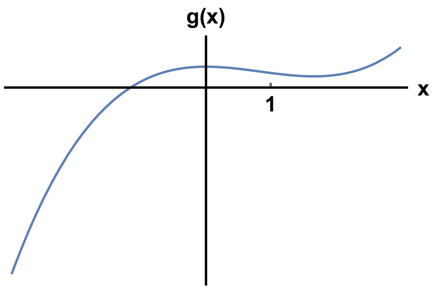
18. *(Graphische Kurvendiskussion, 2.)* Welche der unten dargestellten Funktionen f, g, h bzw. i hat die folgenden Eigenschaften

$$f'(0) \geq 0, \qquad f'(1) < 0 \qquad \text{und} \quad f''(x) \leq 0 \quad \text{für alle sichtbaren } x?$$

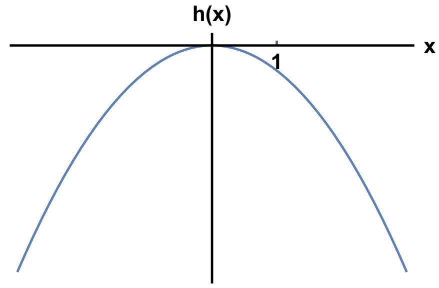
(a) f



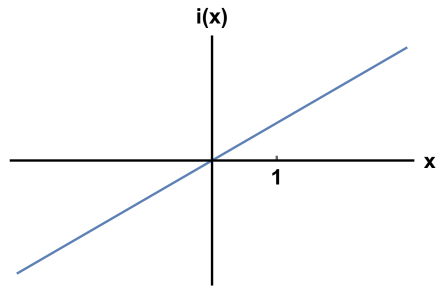
(b) g



(c) h



(d) i



Teil 2: Offene Aufgaben

1 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Differentialrechnung.*

   (a) Für zwei differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und zwei Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt ja bekanntlich

   $$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \,. \tag{1}$$

   Formulieren sie diese Aussage in eigenen Worten, völlig ohne Verwendung von Formeln. (1 Punkt)

   (b) Die Definition der Differenzierbarkeit einer reellen Funktion f in einem Punkt x_0 verlangt, dass der Grenzwert

   $$\lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existiert und endlich ist.} \tag{2}$$

   Geben Sie je ein Beispiel einer in einem Punkt nicht differenzierbaren Funktion, bei der die erste bzw. die zweite Bedingung in der Definition nicht erfüllt ist. Fertigen sie jeweils auch eine Skizze an. (2 Punkte)

   (c) Geben Sie je ein Beispiel einer reellen Funktion mit den folgenden Eigenschaften, falls so eine Funktion existiert. Andernfalls argumentieren Sie, warum es ein solches Beispiel nicht geben kann (je 1 Punkt):

      i. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, streng monoton steigend und $f'(x_0) = 0$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

      ii. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ für einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, aber f hat in x_0 kein Extremum.

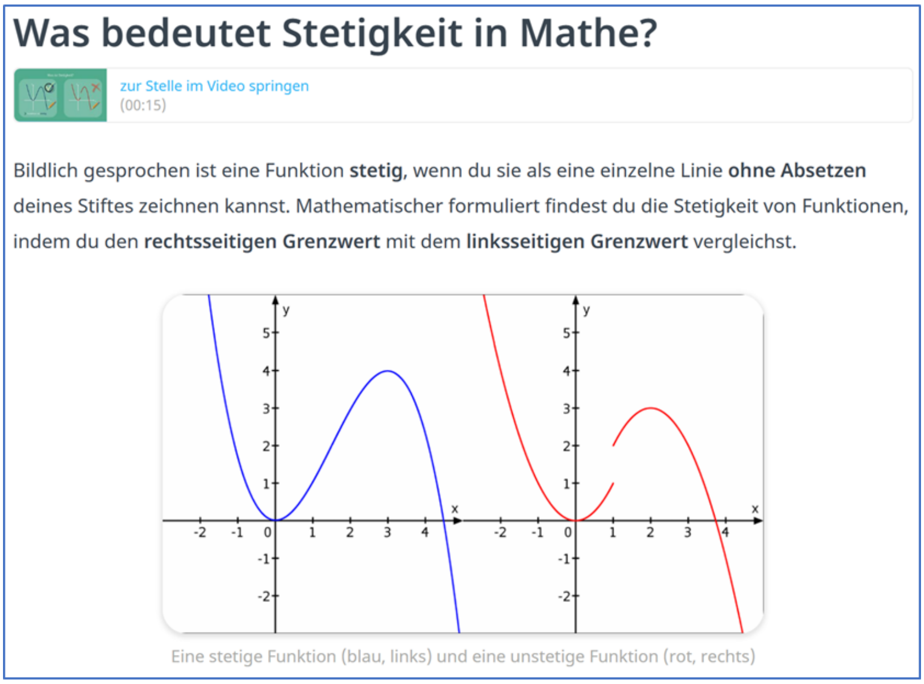
2 Aufgaben zur Fachdidaktischen Reflexion

1. *Grundvorstellungen.*

   (a) Erläutern Sie, was man in der Fachdidaktik unter einer Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff versteht, und was den Unterschied zu einem Aspekt eines mathematischen Begriffs ausmacht. (2 Pkt)

   (b) Eine der drei Grundvorstellungen zum Integralbegriff ist die Rekonstruktionsgrundvorstellung. Beschreiben Sie, was man darunter versteht und wie das Grundverständnis vom *Integrieren als Rekonstruieren* im Unterrichtskontext gut aufgebaut werden kann. (2 Pkte)

2. *Stetige Funktionen.*
Unter `https://studyflix.de/mathematik/stetigkeit-3251` findet man folgende Erläuterung zur Stetigkeit einer Funktion:



Was bedeutet Stetigkeit in Mathe?

zur Stelle im Video springen
(00:15)

Bildlich gesprochen ist eine Funktion **stetig**, wenn du sie als eine einzelne Linie **ohne Absetzen** deines Stiftes zeichnen kannst. Mathematischer formuliert findest du die Stetigkeit von Funktionen, indem du den **rechtsseitigen Grenzwert** mit dem **linksseitigen Grenzwert** vergleichst.

Eine stetige Funktion (blau, links) und eine unstetige Funktion (rot, rechts)

(a) Diskutieren Sie, was an der angeführten Formulierung problematisch ist. (1 Pkt)

(b) Formulieren Sie die ε-δ-Definition für die Stetigkeit. (1 Pkt)

(c) Erläutern Sie, welche Vorstellung zu Stetigkeit für Schüler:innen etwa in der 11. Schulstufe adäquat wäre. (1 Pkte)

3 Aufgaben zur Unterrichtspaxis

1. *Modellierung iterativer Prozesse.*
   Nachstehend finden Sie den Beginn der Aufgabe 15 aus dem Teil 1 der standardisierten Reifeprüfung (AHS) vom 21.05.2021.

> **Karpfen**
>
> Die Anzahl der Karpfen in einem Teich soll auf 800 Karpfen beschränkt sein. Modellhaft wird angenommen, dass der Karpfenbestand in jedem Jahr um 7 % der Differenz zum maximalen Karpfenbestand von 800 Karpfen zunimmt.
>
> Die Anzahl der Karpfen nach n Jahren wird mit $F(n)$ bezeichnet. Es gilt: $F(0) = 500$.

Abbildung 1: Aufgabe 15 aus Teil 1 der SRDP (AHS) vom 21.05.2021.

   (a) Geben Sie eine rekursiv definierte Folge an, die die zeitliche Entwicklung des Karpfenbestands darstellt, und erarbeiten Sie anschließend aus dieser rekursiven Darstellung eine explizite Darstellung. (4 Pkt)

   (b) Danckwerts und Vogel propagieren den Standpunkt, dass Folgen als natürliches Instrument zur Beschreibung iterativer Prozesse einen Platz im Unterricht haben können und sollen. Geben Sie zumindest zwei Themen an, die bei der Arbeit mit einer solchen Aufgabe in natürlicher Weise auftreten. (2 Pkt)