Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2022/23, 4. Termin, 27.9.2023
Sonja Kramer & Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Grundvorstellungen und Grunderfahrungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] Grundvorstellungen sind ein theoretisches Konzept zur Beschreibung mentaler Repräsentationen mathematischer Begriffe.
   (b) [false] In den Grundvorstellungen manifestiert sich der allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterrichts.
   (c) [true] Nach Winter ist der Mathematikunterricht dadurch allgemeinbildend, dass er (die) drei Grunderfahrungen ermöglicht.
   (d) [false] Die drei Winterschen Grunderfahrungen beschreiben das Verhältnis zwischen mathematischen Inhalten und individueller Sinnstiftung.

2. (*Zum Funktionsbegriff.*) Welche der folgenden Aussagen über den Funktionsbegriff sind korrekt?
   (a) [false] Bei der Objektvorstellung des Funktionsbegriffs steht die Zuordnung von Werten durch die Funktion im Zentrum.
   (b) [true] Mit der Kovariationsvorstellung wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken.
   (c) [false] Der Zuordnungsaspekt begreift eine Funktion $f : A \to B$ als eine Zuordnung zwischen den Elementen zweier Mengen A und B, wobei jedem Element von B ein Element von A zugeordnet wird.
   (d) [true] Der Paarmengenaspekt besagt, dass eine Funktion von A nach B durch eine Teilmenge $G \subseteq A \times B$ gegeben ist, die folgende Eigenschaft besitzt: Für jedes $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in G$.

3. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?
   (a) [false] Wenn x Häufungswert von (x_n) ist, dann ist x auch Grenzwert von (x_n).
   (b) [true] (x_n) ist beschränkt, falls es eine Konstante C gibt, sodass für alle Folgenglieder x_n gilt: $|x_n| \leq C$.
   (c) [true] Wenn (x_n) einen Limes hat, dann ist (x_n) beschränkt.
   (d) [true] Wenn (x_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann ist (x_n) schon beschränkt.

4. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Die Grenzwertdefinition beruht stark auf dem Begriff des potentiell Unendlichen.
   (b) [false] Die Definition des Grenzwerts ist vor allem mit der Annäherungsvorstellung verbunden.
   (c) [true] Der Begriff des aktual Unendlichen hilft zu verstehen, dass ein unendlicher Prozess ein endliches Ergebnis haben kann.
   (d) [false] Das aktual Unendliche geht von der Vorstellung eines beliebig oft wiederholbaren Prozesses aus.

5. (*Differenzierbarkeit.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Der Graph einer differenzierbaren Funktion kann Knicke haben aber keine Sprünge.
   (b) [true] Ist f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.
   (c) [true] Ist f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$, so hat f dort eine waagrechte Tangente.
   (d) [false] Der Graph einer differenzierbaren Funktion kann Sprünge haben.

6. (*Integrierbarkeit.)* Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Konvergieren Ober- und Untersummen, dann ist f sicher integrierbar.
   (b) [true] Das Riemannintegral von f ist (falls es existiert) der gemeinsame Limes von Ober- und Untersummen.
   (c) [true] Das Riemannintegral von f ist (falls es existiert) der Limes der Obersummen.
   (d) [false] Ist f integrierbar, dann sind Ober- und Untersummen gleich.

2 Sätze & Resultate

7. *(Zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Jede beschränkte reelle Folge hat genau einen Häufungswert.
   (b) [true] Das Intervallschachtelungsprinzip funktioniert für abgeschlossene aber nicht für offene Intervalle.
   (c) [true] Der Satz von Dedekind besagt, dass (bis auf Isomorphie) genau ein ordnungsvollständiger geordneter Körper existiert, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Unterkörper besitzt.
   (d) [false] Das Supremumsaxiom besagt, dass jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum hat.

8. (Resultate über Folgenkonvergenz.) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?
   (a) [true] Eine konvergente Folge (x_n) hat höchstens einen Grenzwert.
   (b) [true] Konvergiert (x_n) gegen x und (y_n) gegen y und gilt $x_n \leq y_n$ für alle n, dann auch $x \leq y$.
   (c) [false] Ist (x_n) beschränkt, so hat (x_n) einen Limes.
   (d) [true] Der Grenzwert von reellen Folgen respektiert Produkte.
9. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sind korrekt?
   (a) [false] Sind alle Glieder x_n der Reihe positiv, dann ist die Reihe sicher divergent.
   (b) [true] Falls die Reihe konvergiert, so muss $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gelten.
   (c) [true] Falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass alle Reihenglieder x_n die Bedingung $x_n \geq C$ erfüllen, dann divergiert die Reihe.
   (d) [false] Falls die Reihenglieder eine Nullfolge bilden, dann konvergiert automatisch die Reihe.
10. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind korrekt?
   (a) [false] f ist automatisch auch beschränkt.
   (b) [true] Ist f stetig, dann gilt $\lim_{x\nearrow b} f(x) = f(b)$.
   (c) [true] Ist f stetig, so hat f Maximum und Minimum.
   (d) [true] Ist f stetig, so hat f Supremum und Infimum.
11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] Jede Nullstelle von f'' mit an dieser Stelle nicht-verschwindender 3. Ableitung ist ein Wendepunkte von f.
   (b) [true] Hat f in x_0 eine Extremstelle, dann hat f dort auch eine waagrechte Tangente.
   (c) [false] Ist f streng monoton wachsend, dann ist f' überall positiv.
   (d) [true] Am Vorzeichen von f'' lässt sich die Krümmung von f ablesen.
12. *(Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?
   (a) [false] Jede stetige Funktion hat eine eindeutige Stammfunktion.
   (b) [true] Jede differenzierbare Funktion ist (auf abgeschlossenen Intervallen) auch Riemann-integrierbar.
   (c) [false] Jede Riemann-integrierbare Funktion ist auch stetig.
   (d) [false] Ist f stetig auf $\mathbb{R}$ mit Stammfunktion F, dann gilt für $a < b \in \mathbb{R}$
   $$\int_a^b f(s)ds = F(a) - F(b)\,.$$

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Grenzwerte von Folgen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [false] $\dfrac{2^n}{n^2} \to 0 \ (n \to \infty)$.

    (b) [false] $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 0$ für alle $a > 0$.

    (c) [true] $\dfrac{7n^2 + 4n + 7}{4n^2 + n - 4} \to \dfrac{7}{4} \ (n \to \infty)$.

    (d) [true] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

14. *(Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [false] Die periodische Dezimalzahl $0.\bar{3}$ ist durch die geometrische Reihe

    $$3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

    gegeben.

    (b) [true] Für $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum q^k$.

    (c) [false] Die Summenformel für die endliche geometrische Reihe lautet

    $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 + q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für alle } q \in \mathbb{R}.$$

    (d) [true] $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

15. *(Grenzwerte von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt?

    (a) [false] $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

    (b) [true] $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

    (c) [true] $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$.

    (d) [true] $\lim\limits_{x\to 0} x \sin(x) = 0$.

16. *(Differenzieren.)* Welche der folgenden Rechnungen sind korrekt?

    (a) [true] $\left(e^{\sin(x)}\right)' = e^{\sin(x)} \cos(x)$

    (b) [false] $(\sin(e^x))' = \cos(e^x)$

    (c) [false] $\left(\sin(e^{x^2})\right)' = 2x\, e^{x^2} \sin(e^{x^2})$

    (d) [true] $\left(e^{\sin(x^2)}\right)' = e^{\sin(x^2)}\, 2x \cos(x^2)$

17. *(Die Funktion $f(x) = x^4$.)* Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4$$

sind korrekt?

(a) [true] f ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

(b) [false] f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit nicht-negativer Ableitung.

(c) [false] $f''(0) = 0$ und daher hat f in $x = 0$ kein Extremum.

(d) [false] f hat eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Umkehrabbildung.

18. *(Vorzeichenfunktion.)* Wir betrachten die Vorzeichenfunktion

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Welche die folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] sign ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar.

(b) [true] sign ist nicht auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, obwohl der Graph keinen Knick hat.

(c) [false] sign ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(d) [false] $\operatorname{sign}^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Teil 2: Offene Aufgaben

1 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Folgen, Konvergenz und Vollständigkeit.*

   (a) Möglich Antworten (1P):

   - Der Quotient zweier konvergenter Folgen konvergiert gegen der Quotienten der Grenzwerte, falls der Grenzwert der Nennerfolge nicht verschwindet.
   - Die Konvergenz von Folgen respektiert die Quotientenbildung, falls die Folge im Nenner einen nicht-verschwindenden Grenzwert hat.

   (b) Die Aussage ist falsch. (1P) Ein einfaches Gegenbeispiel ist $x_n = 1/n$ und die konstante Folge $y_n = 0$. (1P)

   (c) Die Vollständigkeit ist eine fundamentale Eigenschaft der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, ohne die die Analysis völlig anders aussehen würde. Auf dem (nicht-vollständigen!) Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist keine „vernünftige Analysis" möglich, da viele Resultate dort einach nicht gelten. Beispielsweise können nicht alle quadratischen Gleichungen gelöst werden (z.B. $x^2 = 2$), ebenso gelten der Zwischenwertsatz und das Monotonieprinzip nicht und absolut konvergente Folgen müssen nicht konvergieren.

   Es gibt also viele wichtige Resultate der Analysis, die ohne die Vollständigkeit falsch wären. Als wichtigstes könnte man etwa den Satz von Bolzano-Weierstraß ansehen, da er wesentliches Werkzeug in der Konvergenztheorie ist und äquivalent zu den anschaulicheren Charakterissierungen der Vollständigkeit, wie dem Intervallschachtelungs- und dem Cauchyprinzip. (3P)

2 Aufgaben zur Fachdidaktischen Reflexion

1. *Fundamentale Ideen der Analysis.*
   Fundamentale Ideen der Analysis sind etwa (2P):

   - die Idee des *funktionalen Zusammenhangs*
   - die Idee des *Messens*
   - die Idee des *Approximierens*
   - die Idee der *Änderungsrate*
   - die Idee des *Optimierens*

   Die drei charakteristischen Merkmale zur fundamentalen Idee der Änderungsrate (3P):

   - Weite: Sie durchziehen den Schulstoff wie ein roter Faden. Startet in der Sekundarstufe 1 mit den absoluten und relativen Änderungen und der Prozentrechnung und führt weiter in die Sekundarstufe 2 mit dem Ableitungsbegriff.

- Tiefe: Sie geben zumindest teilweise Aufschluss über das Wesen der Mathematik. Bei den Änderungsraten werden von den Winterschen Grunderfahrungen die Grunderfahrung 2 (mathematische Welt) beim Arbeiten mit dem Differenzenquotient und dem Differenzialquotient gemacht.
- Sinn: Sie sind im Alltagsdenken verankert. Zum Beispiel Modellierungen außermathematischer Probleme mit Hilfe lokaler (oder momentaner) Änderungsraten.

3 Aufgaben zur Unterrichtspaxis

1. *Alternierende Folgen.*
   Richtig ist die Beschreibung alternierender Folgen. Zu Korrigieren sind zwei Punkte (2P):
   - Die Formulierung, dass in jeder noch so kleinen Umgebung um diesen Grenzwert *unendlich viele* Folgenglieder liegen, ist falsch. Ist zum Beispiel ein Häufungswert kein Grenzwert, liegen in jeder noch so kleinen Umgebung um diesen Wert unendlich viele Folgenglieder, außerhalb aber auch.
     Hinweis: Die korrekte Formulierung ist, dass in jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert *fast alle* Folgenglieder liegen. *Fast alle* bedeutet *alle, bis auf endlich viele.*
   - Alternierende Folgen können konvergieren.
     Hinweis für den Schüler: Veranschauliche die Folge $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ und zeige mithilfe der Epsilon-Umgebung, dass diese Folge gegen 0 konvergiert. Finde eine weitere alternierende Folge, die konvergiert und überlege, was diese Folgen gemeinsam haben müssen.
2. *Grundvorstellungen zum Intergralbegriff*
   (a) (i) $[8, 12]$, (ii) $[0, 3]$ (1P)
   (b) Im Zentrum steht die Rekonstruktionsvorstellung. (1P)
   Unter der Rekonstruktionsvorstellung versteht man die Rekonstruktion einer Größe aus gegebenen Änderungsraten (hier im Vordergrund) bzw. die (Re-)Konstruktion einer Stammfunktion einer gegebenen Funktion oder Berandung (hier weniger gefragt). (1P)
   (c) Mögliche Fragestellung zur Flächeninhaltsgrundvorstellung:
   Ist nach Ende der 12-stündigen Aufzeichnungsperiode der Wassermenge im Teich größer oder kleiner als zu Beginn?
   Lösungserwartung: Die Wassermenge ist am Ende höher, weil die Wassermenge während der Aufzeichnungsperiode durch die Fläche zwischen dem Grafen der (Zuflussmengen-) Funktion und der x-Achse gegeben ist. Dabei ist die Fläche während des Zuflusses (Zeitintervall $[0, 8]$) größer als die Fläche während des Abflusses ($[8, 12]$). (2P)
   Die Mittelwertsgrundvorstellung bietet sich hier weniger an.