Vorname:
Familienname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	
2	
3	
4	
G	

Note:

Prüfung

Funktionalanalysis

Sommersemester 2023, Roland Steinbauer

3. Termin, 19.12.2023

1. *Normierte Vektorräume.*

   (a) *Teilräume von Banachräumen.*
   Zeigen Sie, dass ein Teilraum eines Banachraumes genau dann vollständig ist, wenn er abgeschlossen ist. Beantworten Sie zusätzlich folgende Fragen: Welche der beiden Richtungen ist einfacher zu beweisen und warum? (3 Punkte)

   (b) *Der Folgenraum c.*
   Zeigen Sie, dass der Raum der konvergenten Folgen
   $$c = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \mid x_i \in \mathbb{K}, \exists \lim_{i\to\infty} x_i\} \text{ mit } \|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$$
   vollständig ist. Geben Sie zusätzlich an, wo Sie dabei die Vollständigkeit anderer Räume verwenden! (4 Punkte)

   (c) *Skala von Räumen.*
   Ordnen Sie die folgenden (Klassen von) Räume(n) vom speziellsten zum allgemeinsten: Normierter Vektorraum, topologischer Raum, Prä-Hilbertraum, metrischer (Vektor-)Raum und geben Sie jeweils an, wie aus der spezielleren Struktur die allgemeinere gebildet wird (z.B. wie ausgehend von einer Metrik eine Topologie definiert wird). (2 Punkte)

2. *Operatoren.*

   (a) *Existenz des adjungierten Operators.*
   Zeigen Sie, dass es zu jedem Operator $T \in L(H, K)$ zwischen den Hilberträumen H und K einen eindeutig bestimmten adjungierten Operator $T^* \in L(K, H)$ gibt. Wie ist dieser Operator definiert? Welchen wichtigen Satz über Dualräume von Hilberträumen müssen Sie im Beweis verwenden und was besagt dieser?
   (5 Punkte)

(b) *Kompakte Operatoren.*

   (i) Definieren Sie den Begriff eines kompakten Operators und zeigen Sie, dass jeder kompakte Operator schon beschränkt ist. (2 Punkte)

   (ii) Beweisen Sie: Jeder kompakte Operator kann beliebig gut durch einen Operator mit endlich-dimensionalem Bild approximiert werden. (3 Punkte)

3. *Hauptsätze der Funktionalanalysis.*

   (a) *Spektralsatz.*

   (i) Formulieren Sie den Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren auf Hilberträumen. (2 Punkte)

   (ii) In der Situation des Spektralsatzes sei $(e_n)_n$ ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_j des Operators T. Zeigen Sie, dass dann die Spektraldarstellung

$$T = \sum_n \lambda_n e_n \otimes e_n^*$$

   bzgl. der Operatornorm gilt. (2 Punkte)

   (b) *Funktionale sind punktetrennend.*
   Es ist eine Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach, dass Funktionale in normierten Vektorräumen punktetrennend sind. Formulieren Sie diese Aussage genau und beweisen Sie sie (wobei sie den Satz von Hahn-Banach voraussetzen). (3 Punkte)

   (c) *Offene Abbildung.*
   Formulieren Sie den Satz von der offenen Abbildung und folgern Sie daraus den Isomorphiesatz von Banach. Formulieren Sie letzteren auch explizit. (3 Punkte)

4. *Beispiele und Gegenbeispiele.*
   Bearbeiten Sie jeweils die Fragestellung bzw. geben Sie jeweils ein Beispiel an und begründen Sie kurz, warum es die geforderten Eigenschaften hat bzw. begründen Sie, warum es kein solches Beispiel geben kann. (Jeweils 2 Punkte)

   (a) Ein stetiges lineares Funktional auf l^p für $2 < p < \infty$.

   (b) Einen bijektiven stetigen und linearen Operator zwischen Banachräumen mit unstetiger Inverser.

   (c) Einen abgeschlossenen Differentialoperator, der nicht stetig ist.

   (d) Einen unstetigen linearen Operator zwischen normierter Vektorräumen.

   (e) Wie sieht der adjungierte Operator zum Rechtsshift auf l^2, $U(x_1, x_2, x_3 \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ aus?