Aufgabensammlung
Grundbegriffe der Topologie

R. Steinbauer

Wintersemester 2005/06

Die vorliegende Aufgabensammlung dient als Grundlage für das *Proseminar zu Grundbegriffe der Topologie*, das die gleichnamige Vorlesung begeleitet. Das Proseminar und die Vorlesung bilden eine untrennbare Einheit: der behandelte Stoff ist identisch, es laufen bloss die beiden jeweils passenden Teile des Lernprozesses in der Vorlesung bzw. im Proseminar ab. Ein Verständnis der einschlägigen Begriffe kann daher nur auf der Basis beider Veranstaltungen entstehen.

Die Aufgaben sind eng an den Ablauf der Vorlesung angepaßt; die Kapitelnummerierung entspricht der der Vorlesung. Die Aufgabensammlung enthält eine Mischung aus „Routinebeispielen" (kürzer, weniger anspruchsvoll) und längeren, aufwendigeren Aufgaben, die zum Teil auch offen formuliert sind; speziell—aber nicht nur—für letztere empfiehlt sich ein Nachschlagen in der entsprechenden Literatur (für einen Überblick siehe die Literaturliste auf der Vorlesungshomepage) und/oder Gruppenarbeit.

0 Vorbemerkungen—Zur Einstimmung

Die beiden Aufgaben dieses Abschnitts dienen der Wiederholung mengentheoretischer Grundlagen.

1. *De Morgan'sche Gesetze.*
   Beweise die beiden Gesetze von De Morgan für eine beliebige Menge X und eine beliebige Familie von Teilmengen $\{A_i \mid i \in I\}$, (I beliebig) von X, also
   $$X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i) \text{ und } \dots .$$

2. *Wettkampf Bild vs. Urbild.*
   Seien X und Y Mengen mit jeweils mindestens 2 Elementen. Der Wettkampf besteht aus den 4 Teildisziplinen *Vereinigung, Durchschnitt, Differenz* und *Komplement.*

   In der Disziplin ,,Vereinigung" beispielsweise werden für den Kandidaten ,,Bild" für beliebiges $f : X \to Y$ und beliebige Teilmengen $A, B \subseteq X$ die Mengen $f(A \cup B)$ und $f(A) \cup f(B)$ verglichen. Ist die erste Menge in der zweiten enthalten erhält Kandidat ,,Bild" einen Punkt; ebenso falls die zweite Menge in der ersten enthalten ist. (Insgesamt ergeben sich also 2 Punkte, falls die Mengen übereinstimmen.)

   Der Berwerb für die Kandidatin ,,Urbild" verläuft ebenso analog wie die anderen 3 Teildisziplinen.

   Zeige, dass der Wettkampf 4 : 8 endet. Belege jeden Erfolg resp. Mißerfolg einer KandidatIn mit einem Beweis resp. mit einem Gegenbeispiel. (zuviel Arbeit? im Team aufteilen!)

   Hätte dem Verlierer ein ,,Doping" in Form von Injektivität/Surjektivität der Funktion f genützt? Wenn ja, in welcher der Teildisziplinen? Wie geht der Wettkampf bei ,,vollem" Doping (also f bijektiv) aus?

1 Metrische Räume

3. *Beispiele metrischer Räume (vgl. Vo. Bsp. 1.3).*
   Zeige, dass es sich bei folgenden Paaren bestehend aus einer Menge und einer Abbildung tatsächlich um metrische Räume handelt.

   (i) $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x,y) := |x-y|$

   (ii) $(\mathbb{R}^n, d_2)$ wobei
   $$d_2(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$
   und Vektoren im $\mathbb{R}^n$ als $x = (x_1, \ldots, x_n)$ geschrieben werden. *Hinweis:* Um die Dreiecksungleichung zu beweisen, ziehe die Minkowskische Ungleichung (für $p = 2$) heran. Sie ist in jedem (guten) Analysisbuch zu finden. Gib einen Beweis für diese Ungleichung (nur $p = 2$; dieser Fall läßt sich einfach aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung zeigen).

   (iii) (X, d) wobei $\emptyset \neq X$ eine beliebige Menge und d die diskrete Metrik ist, d.h.
   $$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

4. *Beispiele normierter Vektorräume (vgl. Vo. Bsp. 1.5, Bsp. 1.7).*
   Zeige, dass es sich bei den folgenden Beispielen tatsächlich um normierte Vektorräume handelt.

   (i) $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_1)$

   (ii) $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$, wobei $\|x\|_\infty := \max_{1\le i\le n} |x_i|$.

   (iii) $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_p)$, wobei $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$.
   Hinweis: Um Wiederholungen zu vermeiden sei hier $p > 1$. Nun ist zum Beweis der Dreiecksungleichung wieder die Minkowskische Ungleichung gefragt—allerdings für allgemeines $1 < p < \infty$. Stöbere diese Ungleichung in der Literatur auf und verschaffe dir einen Überblick über ihren Beweis.

5. *Norm vs. Metrik.*
   Stammt *jede* Metrik auf einem Vektorraum V im Sinne von Prop. 1.6 von einer Norm ab? Salopp gefragt: Gibt es mehr normierte oder mehr metrische Vektorräume, d.h. welcher der Begriffe ist allgemeiner? (*Tipp:* Wie steht es mit der diskreten Metrik auf $\mathbb{R}$?)

6. *Funktionenräume (vgl. Vo. Bem. 1.11).*

   (i) Zeige, dass die Menge der reellwertigen Funktionen auf einem Intervall I
   $$\mathcal{F} := \{f : I \to \mathbb{R}\}$$
   mit den punktweisen Operationen (siehe. Vo. Bsp. 1.8) einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bilden. Was ändert sich, falls der Zielbereich $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^n$ ersetzt wird?

   Wie steht es um die Menge der stetigen, beschränkten, (Riemann)-Integrierbaren bzw. differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$? Ziehe dein Lieblingsbuch zur Analysis zu Rate um Sätze zu finden, die die jeweilig entscheidende(n) Frage(n) beantworten.

(ii) Sei $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f(t)^2\, dt}$$

eine Norm auf $\mathcal{C}^0[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ ist. Ist $\|\ \|_2$ auch eine Norm auf der Menge $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. *Hinweis:* Hier muß nun die Minkowskische Ungleichung für Integrale herangezogen werden. Stöbere diese in der Literatur auf und zitiere sie in deinem Beweis der Dreiecksungleichung.

(iii) Zeige, dass die Maximumsnorm

$$\|f\|_\infty := \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

eine Norm auf $\mathcal{C}^0[a,b]$ ist. Wie steht es mit $\|\ \|_\infty$ auf $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

7. *Produkte metrischer Räume (vgl. Vo. Bem. 1.11).*

(i) Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume. Zeige, dass sowohl

$$d_p\big((x,y),(x',y')\big) := \big(d_x(x,x')^p + d_y(y,y')^p\big)^{1/p}$$

als auch

$$d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) := \max\big(d_x(x,x'),\, d_y(y,y')\big)$$

Metriken auf dem Cartesischen Produkt $X \times Y$ sind. *Tipp:* Verhilf hier der Minkowskischen Ungleichung zu ihrem 4. Auftritt.

(ii) Seien (X_i, d_i), $i \in \mathbb{N}$ eine Familie metrischer Räume. Zeige, dass auf dem Produkt $\Pi_{i=1}^\infty X_i = \{x = (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in X_i\ \forall i \in \mathbb{N}\}$ durch

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i}\ \frac{d_i(x_i,y_i)}{1 + d_i(x_i,y_i)}$$

eine Metrik gegeben ist. *Tipp:* Der Faktor $1/2^i$ dient lediglich zur Konvergenzerzeugung und solte dich nicht beunruhigen. Der Knackpunkt ist es zu beweisen, dass $\tilde{d}(x,y) := d(x,y)/(1+d(x,y))$ eine Metrik ist, falls d eine ist. Zum Beweis der Dreiecksungleichung empfiehlt es sich das Monotonieverhalten der Funktion $t \mapsto t/(1+t)$ ins Spiel zu bringen.

8. *Einheitskugeln im $\mathbb{R}^2$.*
Skizziere graphisch die „Einheitskugeln" $B_1(0)$ im $\mathbb{R}^2$ bzgl. der 1-, der 2- und der Maximumsnorm(/metrik).

9. *Eigenschaften abgeschlossener Mengen.*
Zeige, dass in einem metrischen Raum (X,d) folgendes gilt (vgl. Vo. Satz 1.15).

(i) X und $\emptyset$ sind abgeschlossen.

(ii) Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

(iii) Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

(iv) Einpunktige Teilmengen von X sind abgeschlossen.

Hinweis: Bei diesem Beispiel kommt es darauf an, nur das zu verwenden, was wir in der Vo. über offene/abgeschlossene Mengen in metrischen Räumen bewiesen haben (und was du wiederum daraus bewiesen hast) und *nicht* etwa, was du über abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ weißt!

10. *Vereinigungen abgeschlossener und Durchschnitte offener Mengen.*
Zeige durch explitizite Gegenbeispiele (in einem möglichst einfachen metrischen Raum), dass beliebige Vereinigungen (Durchschnitte) abgeschlossener (offener) Mengen nicht abgeschlossen (offen) sein müssen.

11. *Eindeutikeit des Grenzwerts.*
Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ im metrischen Raum (X, d). Zeige, dass x eindeutig bestimmt ist. *Hinweis:* Indirekt angenommen $x = \lim_{n\to\infty} x_n = y$ dann folgt schon $y = x$.

12. *Charakterisierung stetiger Funktionen mittels Folgen.*
Beweise den Satz 1.21 aus der Vorlesung, also dass $f : (X, d_x) \to (Y, d_y)$ genau dann stetig in $x \in X$ ist, falls für jede Folge $x_n \to x$ die Bildfolge $f(x_n)$ gegen $f(x)$ konvergiert. *Tipp:* Schreibe den entsprechenden Beweis aus der Analysis in die Sprache der metrischen Räume um.

13. *Konvergenz im $\mathbb{R}^n$.* (vgl. Vo. 1.22(i))
Zeige die folgende Ungleichung für $||\ ||_1$ und $||\ ||_2$ im $\mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ ||x||_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1.$$

Was folgt daraus für Konvergenz, offene Mengen und Stetigkeit auf $\mathbb{R}^n$, wenn dieser (Vektor)-raum durch Ausstattung mit jeweils einer der beiden Metriken, die aus den besagten Nomen gewonnen werden können, zum metrischen Raum gemacht wird.

14. *Äquivalente Metriken.*
Auf der Menge X seien die beiden Metriken d_1 und d_2 erklärt. Wir nennen d_1 stärker als d_2 (und d_2 schwächer als d_1), falls $d_1(x_n, x) \to 0$ stets $d_2(x_n, x) \to 0$ erzwingt. Ist d_1 gleichzeitig stärker und schwächer als d_2, dann sind d_1 und d_2 also äquivalente Metriken im Sinn von Vo. Bem. 1.22(i). Zeige
    (i) Die diskrete Metrik ist die stärkste Metrik auf X.
    (ii) d_1 ist genau dann stärker als d_2, falls für jedes $x \in X$ jede offene d_2-ε-Kugel um x eine offene d_1-η-Kugel um x enthält.
    (iii) Auf jedem metrischen Raum (X, d_1) läßt sich durch

$$d_2(x, y) := \frac{d_1(x, y)}{1 + d_1(x, y)}$$

eine zu d_1 äquivalente Metrik definieren. (Bemerke, dass alle Punkte in X einen d_2-Abstand kleiner 1 haben!)

15. *Uneigentliche Konvergenz.*
Die Sprechweise von der uneigentlichen Konvergenz in der Analysis (schlage die Definition in deiner Lieblingsquelle zu Analysis nach) kann im Sinne der Konvergenz in metrischen Räumen verstanden werden. Zu diesem Zweck betrachten wir die beidseitig erweiteret Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. (ACHTUNG: $\pm\infty$ sind hier nur Symbole, die zur Menge $\mathbb{R}$ dazugegeben werden; natürlich folgt die Schreibweise der intuitiven Bedeutung.) Wir versehen $\bar{\mathbb{R}}$ wie folgt mit einer Metrik: Sei

$$g(x) := \begin{cases} -\pi/2 & (x = -\infty) \\ \arctan(x) & (x \in \mathbb{R}) \\ +\pi/2 & (x = +\infty) \end{cases}$$

und $d(x, y) := |g(x) - g(y)|$ $(x, y \in \bar{\mathbb{R}})$.

Zeige, dass d eine Metrik auf $\bar{\mathbb{R}}$ ist und dass eine Folge $(x_n)_n \in \mathbb{R}$ genau dann uneigentlich gegen $\pm\infty$ konvergiert, falls $(x_n)_n$ im metrischen Raum $(\bar{\mathbb{R}}, d)$ gegen $\pm\infty$ konvergiert, d.h. wenn $d(x_n, \pm\infty)$ gegen 0 geht.

16. *Häufungswerte mittels Umgebungen.*
Charakterisiere den Begriff Häufungswert einer Folge im metrischen Raum (X, d) mittels Umgebungen; formuliere also den Begriff Häufungswert in der Sprache der Topologie (im Sinne von Vo. Bem. 1.27).

2 Topologische Räume

17. *Beispiele topologischer Räume (vgl. Vo. Bsp. 2.4).*
Zeige, dass die Topologien aus Vo. Bsp. 2.4 (iv) und (v) tatsächlich die Axiome (O1)–(O3) erfüllen (und daher zu Recht Topologien genannt werden). Genauer zeige, dass
    (i) auf $\mathbb{R}$ das System $\mathcal{O}_<$ bestehen aus allen Intervallen der Form $(-\infty, a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig zusammen mit $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ und
    (ii) das System $\mathcal{O}_{\text{co}} := \{A \subseteq X | \ X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \emptyset$ auf einer beliebigen Menge X

    tatsächlich Topologien sind.

18. *Topologien auf endlichen Mengen.*
Wieviele Toplogien gibt es auf einer Menge X, die
    (i) kein Element (also $X = \emptyset$)
    (ii) ein Element
    (iii) zwei Elemente

    hat und wie sehen diese aus?

    Nebenbemerkung: Neugierig geworden, wieviele Toplogien es auf dem Raum mit 3, 4, . . . Elementen gibt? Bei 3 Elementen sind es 29, bei 4 Elementen schon 355. Die Schwierigkeit diese Zahlen auszurechnen besteht natürlich darin, eine möglichst systematische und ökonomische Vorgehensweise zu finden. Beschäftigung für Knoblerinnen und Tüftler an trüben Novembertagen: Schreibe ein Programm (evtl. Mathematica Notebook), dass die Anzahl der Toplogien auf der Menge mit n Elementen ausrechnet und/oder google das Thema um mehr darüber zu erfahren.

19. *Vergleich von Topologien 1 (vgl. Vo. Bem. 2.6).*
Zeige, dass die in Vo. Bem. 2.6 definierte Relation $\leq$ auf der Menge aller Topologien auf einer fixen Menge X
$$\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2 \ :\Longleftrightarrow \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$$
eine Ordnung aber keine Totalordnung definiert.

    Tipp: Für ein Beispiel nicht vergleichbarer Topologien empfiehlt es sich Aufgabe 18(iii) genauer anzusehen.

20. *Vergleich von Topologien 2.*
Zeige, dass auf $\mathbb{R}$
    (i) $\mathcal{O}_{\text{Kl}} \leq \mathcal{O}_{\text{co}} \leq \mathcal{O}_{\text{n}} \leq \mathcal{O}_{\text{dis}}$,
    (ii) $\mathcal{O}_{\text{Kl}} \leq \mathcal{O}_< \leq \mathcal{O}_{\text{n}} \leq \mathcal{O}_{\text{dis}}$ und
    (iii) $\mathcal{O}_<$ ist mit $\mathcal{O}_{\text{co}}$ unvergleichbar

    gilt. Dabei sind (vgl. Vo. Bsp. 2.4) $\mathcal{O}_{\text{kl}}$, $\mathcal{O}_{\text{co}}$, $\mathcal{O}_{\text{n}}$ und $\mathcal{O}_{\text{dis}}$ die Klumpen-, die kofinite, die natürliche respektive die diskrete Topologie und die Topologie $\mathcal{O}_<$ in Aufgabe 17 (i) definiert.

21. *Topologie via abgeschlossene Mengen.*
In Vo. Def. 2.3 haben wir Toplogien durch die Vorgabe des Systems der offenen Mengen definiert. Alternativ dazu kann eine Topologie auch durch Vorgabe des System abgeschlossenen Mengen definiert werden. Zeige dazu den folgenden Satz.

    Sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ ein Teilsystem von 2^X mit den Eigenschaften

(A1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{A}$

(A2) Beliebige Durchschnitte von Mengen in $\mathcal{A}$ liegen wieder in $\mathcal{A}$.

(A3) Endliche Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{A}$ liegen wieder in $\mathcal{A}$.

Dann ist

$$\mathcal{O} := \{X \setminus A |\ A \in \mathcal{A}\}$$

eine Topologie auf X. $\mathcal{A}$ ist genau die Familie der abgeschlossenen Mengen in $(X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit diesen Eigenschaften.

22. *Basen in metrischen Räumen (vgl. Vo. Bsp. 2.10).*
Sei (X, d) ein metrischen Raum. Wir betrachten die Topologie $\mathcal{O} := \{O \subset X |\ \forall x \in O\ \exists B_\varepsilon(x) \subseteq O\}$ (vgl. Vo. Bsp. 2.4). Zeige

   (i) Die offenen ε-Kugeln $B_\varepsilon(x)$ $(x \in X,\ \varepsilon > 0)$ bilden eine Basis der Topologie.

   (ii) Die offenen $1/k$-Kugeln $B_{1/k}(x)$ $(x \in X,\ k \in \mathbb{N})$ bilden eine Basis der Topologie.

23. *Abzählbare Basis für den $\mathbb{R}^n$. (vgl. Vo. Bsp. 2.10)*
Wir betrachten $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_n)$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass es eine abzählbare Basis für diese Topologie gibt. Unter Verwendung von Aufgabe 22 (ii) zeige, dass die offenen $1/k$-Kugeln $B_{1/k}(x)$ mit rationalen Mittelpunktskoordinaten (d.h. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in \mathbb{Q}\ \forall 1 \leq i \leq n$) eine Basis bilden. Jede dieser $B_{1/k}(x)$ ist also durch $n+1$ rationale Zahlen bestimmt und daher ist $\{B_{1/k}(x)|\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n,\ k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis für $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_n)$.

24. *Subbasis für $\mathbb{R}$.*
Zeige, dass die Intervalle

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} := \{(-\infty, a), (a, \infty)|\ a \in \mathbb{Q}\}$$

eine Subasis für die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$ bilden.

25. *Boxtopologie (vgl. Vo. Bsp. 2.15(ii)).*
Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$ $(i \in I,\ I$ beliebig) topologische Räume. Das (in Vo. Bsp. 2.15(ii)) angegebene System

$$\mathcal{B}_{\text{Box}} := \{\Pi_{i \in I} Y_i |\ Y_i \in \mathcal{O}_i \text{ beliebig }\}$$

erfüllt die Eigenschaften (B1) und (B3) aus Vo. Satz 2.11 und ist daher Basis einer Topologie auf $\Pi_{i \in I} X_i$.

26. *Grundeigenschaften von Umgebungsbasen.*
Beweise den Satz 2.24 aus der Vo., d.h. beweise, dass in jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ für ein System von Umgebungsbasen $\mathcal{W}_x$ $(x \in X)$ die drei Eigenschaften

   (UB1) $\forall W \in \mathcal{W}_x :\ x \in W$

   (UB2) $\forall W_1, W_2 \in \mathcal{W}_x\ \exists W_3 \in \mathcal{W}_x :\ W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$

   (UB4) $\forall W \in \mathcal{W}_x\ \exists V \in \mathcal{W}_x :\ V \subseteq W$ und $\forall y \in V\ \exists W_y \in \mathcal{W}_y :\ W_y \subseteq W$.

   gelten.

27. *Umgebungsbasen für metrische Räume (vgl. Vo. Bsp. 2.26(i)).*
Zeige, dass in einem metrischen Raum die ε-Kugeln um x eine Umgebungsbasis bei x für die (von der Metrik induzierte—vgl. Vo. 2.4(i)) Topologie sind.

28. *Niemytzki-Raum (vgl. Vo. Bsp. 2.26(ii)).*
Zeige, dass die im Bsp. 2.26(ii) in der Vorlesung angegebenen Umgebungsbasen $\mathcal{W}_p$ für die Niemytzki-Topologie auf der oberen Halbebene tasächlich die einschlägigen Eigenschaften (UB1)—(UB3) erfüllen (und somit auch in diesm Fall zu Recht von einer Topologie gesprochen werden kann).

29. *Abschluss (vgl. Vo. Beob. 2.36).*
Zeige, dass für eine Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ gilt.
   (i) $\bar{A} = A \cup \partial A$
   (ii) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

30. *Charaktersisierung des Abschlusses (vgl. Vo. Prop. 2.39).*
Beweise Proposition 2.39 aus der Vorlesung also, dass der Abschluss $\bar{A}$ einer beliebigen Teilmenge A des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält.

31. *Eigenschaften des Abschlusses (vgl. Vo. 2.40).*
Beweise Proposition 2.40 aus der Vorlesung, also folgende Eigenschaften des Abschlusses einer beliebigen Teilmenge A des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$.
   - $\bar{\emptyset} = \emptyset$ $\bar{X} = X$
   - $A \subset B \ \Rightarrow \ \bar{A} \subset \bar{B}$
   - $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
   - A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\bar{A} = A$.
   - $\bar{\bar{A}} = A$

32. *Kugeln und Sphären in metrischen Räumen.*
Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Die Sphären $S_\varepsilon(x)$ und die abgeschlossenen Kugeln $K_\varepsilon(x)$ sind definiert als
$$S_\varepsilon(x) := \{y \in X |\ d(x, y) = \varepsilon\} \quad \text{und} \quad K_\varepsilon(x) := \{y \in X |\ d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$
Zeige, dass alle $S_\varepsilon(x)$ und auch alle $K_\varepsilon(x)$ abgeschlossen sind.
Hinweis: Zeige zunächst, dass das Äußere der offenen ε-Kugel offen ist.

33. *Rand und Abschluss der ε-Kugeln im diskreten metrischen Raum.*
Sei X eine mindestens zweipunktige Menge und d die diskrete Metrik auf X.
   (i) Bestimme für $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ die Mengen $B_\varepsilon(x)$ sowie $S_\varepsilon(x)$ und $K_\varepsilon(x)$ (siehe Definitionen in Aufgabe 32.)
   (ii) Zeige, dass die von d auf X (gemäß Vo. Bsp. 2.4(i)) induzierte Topologie die diskrete Topologie ist.
   (iii) Vergleiche $S_1(x)$ mit $\partial B_1(x)$ und $K_1(x)$ mit $\overline{B_1(x)}$. Inwiefern unterscheidet sich die Situation hier von der (vertrauten und anschaulichen) Situation in $(\mathbb{R}^n, d_2)$?

34. *Vereinigung und Inneres; Duchschnitt und Abschluss.*
Seien A und B Teilmengen des Topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$. Finde Formeln (analog zu Vo. Prop. 2.34(iv) bzw. 2.40(iv)) für
   (i) $(A \cup B)^\circ$ und
   (ii) $\overline{A \cap B}$.

Kläre die jeweilige Situation vollständig inklusive allfälliger Beweise und Gegenbeispiele—und zwar möglichst radikaler (das geht schon in $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$!).

35. *Niemytzki-Raum, Teil 2.*
Erstelle eine ausführliche Fassung des Beweises (vgl. Vo. Beweis von Thm. 2.54, Kor. 2.55), dass der Niemytzki-Raum separabel ist, aber nicht AA2 und daher auch nicht metrisierbar (dh. seine Topologie nicht von einer Metrik induziert sein kann).

3 Konvergenz

36. *Konvergenz in einfachen Fällen.*
Wie sehen konvergente Netze in topologischen Räumen mit
    (i) der Klumpentopologie und
    (ii) der diskreten Topologie

    aus?

37. *Abschluss via Netze (vgl. Vo. Satz 3.10).*
Beweise Satz 3.10(ii) aus der Vorlesung, d.h. zeige dass
$$\bar{A} = \{x \in X | \ \exists \text{ Netz } (x_\lambda)_\lambda \text{ in } A : x_\lambda \to x\}.$$

38. *Topologie der punktweisen Konvergenz (vgl. Vo. Bem. 1.18(ii)).*
Wir betrachten den (reellen) Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, also
$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$
und definieren darauf eine Topologie $\mathcal{O}$ mittels Vorgabe einer Subbasis (vgl. Vo. Satz 2.13.) $S_{t,a,b}$, wobei für $t, a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$
$$S_{t,a,b} := \{f \in \mathcal{F} | \ a < f(t) < b\}.$$
    (i) Bevor du ernsthaft beginnst die Aufgaben (ii)-(v) zu lösen, beantworte die Frage: Wozu dient diese Aufgabe?
    (ii) Zeige, dass der Name ,,Topologie der punktweisen Konverenz" gerechtfertigt ist, d.h. zeige, dass eine *Folge* von Funktionen $(f_n)_n$ genau dann punktweise konvergiert, wenn sie in $(\mathcal{F}, \mathcal{O})$ konvergiert.
    (iii) Zeige dass die konstante Funktion $f(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ im Abschluß $\bar{A}$ der Menge
    $$A := \{f \in \mathcal{F} | \ f(x) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } x\}$$
    liegt.
    (iv) Zeige, dass es keine Folge $(f_n)_n$ in A gibt, die gegen f konvergiert. (*Hinweis:* Sei C_n die (endliche!) Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $f_n(x) \neq 0$ gilt und betrachte die Umgebung $S_{t,1/2,3/2}$ von f für ein t mit $t \notin C_n \ \forall n$.)
    (v) Zeige, $(\mathcal{F}, \mathcal{O})$ ist nicht AA1 und daher auch nicht metrisierbar. (*Hinweis:* verwende die Charakterisierung des Abschlusses in metrischen Räumen analog zu Vo. Satz 3.10(ii).)
    (vi) Als Draufgabe konstruiere ein Netz in A, dass gegen f konvergiert. (Ein solches muss es ja wegen Vo. Satz 3.10(ii) geben! *Hinweis:* Betrachte $\Lambda = \{M \subseteq \mathbb{R} | M \text{ endlich}\}$ und f_Λ, die charakteristische Funktion von Λ.)

39. *Charakterisierung von T_1-Räumen (vgl. Vo. Bem. 3.22(ii)).*
Beweise Bemerkung 3.22(ii) aus der Vorlesung, also, dass ein topologischer Raum genau dann das Trennungsaxiom T_1 erfüllt, falls alle einpunktigen Mengen $\{x\}$ (oft auch Singletons genannt) abgeschlossen sind.

40. *Charakterisierung von T_4-Räumen (vgl. Vo. Bem. 3.22(iv)).*
Beweise Bemerkung 3.22(iv) aus der Vorlesung, also, dass ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ genau dann das Trennungsaxiom T_4 erfüllt, falls
$$\forall \ U \in \mathcal{O} \ \forall A \text{ abgeschlossen mit } A \subseteq U \ \exists V \in \mathcal{O} : A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subset U$$
gilt, also zwischen jede abgeschlossene Menge in einer offenen eine weitere offene Menge passt, sodass sogar ihr Abschluss noch in der ersten offenen Menge liegt (Skizze!).

4 Stetigkeit

41. *Stetigkeit in einfachen Fällen.*
Zeige, dass $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ auf jeden Fall stetig ist, falls $\mathcal{O}_X = 2^X$ oder $\mathcal{O}_Y$ die Klumpentopologie ist.

42. *Stetige Abbildungen nach $\mathbb{R}$.*
Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$ stetig. Zeige, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ die Mengen $U = \{x \in X : f(x) > a\}$, $V = \{x \in X : f(x) < b\}$ und $W = \{x \in X : a < f(x) < b\}$ offen und die Mengen $A = \{x \in X : f(x) \geq a\}$, $B = \{x \in X : f(x) \leq b\}$, $C = \{x \in X : a \leq f(x) \leq b\}$, und $D = \{x \in X : f(x) = a\}$ abgeschlossen sind.

43. *Umformulierungen für Stetigkeit (vgl. Vo. Satz 4.4).*
Beweise Satz 4.4 aus der Vorlesung, d.h. zeige dass eine Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ genau dann stetig ist, wenn eine der folgenden (daher äquivalenten) Bedingungen gilt.

    (i) $\forall x \in X : U \in \mathcal{U}_{f(x)} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_x$
    (d.h. Urbilder von Umgebungen sind Umgebungen)

    (ii) $\forall A \subseteq Y$ abgeschlossen ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X
    (d.h. Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen)

44. *Stetige Abbildungen in einen Hausdorff-Raum.*
Seien f, g stetige Abbildungen von einem topologischen Raum X in einen Hausdorff-Raum Y. Zeige, dass die Menge $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen ist. Weiters zeige, dass falls f und g auf einer dichten Teilmenge von X übereinstimmen, dann gilt schon $f = g$.

45. *Lemma von Urysohn (vgl. Vo. Satz 4.14, 4.16).*
Verwandle die Beweisskizze 4.16 für das Lemma von Urysohn in einen wasserdichten Beweis. (*Hinweis:* [J], VIII,§2).

5 Spurtopologie, Initiale und Finale Topologie

46. *Eigenschaften der Spurtopologie (vgl. Vo. Prop. 5.4).*
Beweise Proposition 5.4 aus der Vorlesung, d.h. zeige folgende Eigenschaften der der Spurtopologie $\mathcal{O}|_Y$ auf der Teilmenge Y des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$.

    (i) $U \in \mathcal{U}_x^Y \;\Leftrightarrow\; \exists\, W \in \mathcal{U}_x : U = W \cap Y$

    (ii) A abgeschlossen bzgl. $\mathcal{O}|_Y \;\Leftrightarrow\; \exists\, B$ abgeschlossen bezgl. $\mathcal{O}$: $A = B \cap Y$

    (iii) $\forall\, A \subseteq Y : \bar{A}^Y = \bar{A}^X \cap Y$

    (iv) Sei $(x_\lambda)_\lambda$ ein Netz in Y und $x \in Y$, dann gilt
    $$x_\lambda \to x \text{ bzgl. } \mathcal{O}|_Y \;\Leftrightarrow\; x_\lambda \to x \text{ bzgl. } \mathcal{O}$$

    (v) $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig $\Rightarrow$ $f|_Y : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig

47. *Innerers, Äußeres, Rand, Häufungs- und isolierte Punkte (vgl. Vo. Bem. 2.48).*
Gib einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$—und zwar eine Teilraum von $\mathbb{R}$ mit der Spurtopologie—und eine Teilmenge $A \subseteq X$ an, sodass sämtliche mögliche Teilmengen der von A, A^{c}, A', $\mathrm{Isol}(A)$, ∂A induzierten Partition (vgl. Vo. 2.48) nichtleer sind. Gib für jede der Teilmengen einen ihrer Punkte an.

48. *Spurtopologie im Niemytzki-Raum (vgl. Vo. 2.26(iii)).*
Wie sieht die von der Niemytzki-Toplogie induzierte Toplogie auf der x-Achse aus?

49. *Vererbung topologischer Eigenschaften.*
Eine Eigenschaft (E) eines toplogischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ heißt *„erblich"* falls sie mit $(X, \mathcal{O})$ auch jeder Teilraum $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ hat. Zeige

   (i) AA1 und AA2 sind erblich, Separabilität ist nicht erblich (*Hinweis:* Aufgabe 48).

   (ii) Separabilität vererbt sich auf alle $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ mit Y offen in X.

50. *Produkttopologie.*
Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$ topologische Räume $(i \in I)$, pr_k die Projektion von $X := \Pi_{i \in I} X_i$ auf X_k $(k \in I;\ \mathrm{pr}_k : (x_i)_i \mapsto x_k)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum.

   Zeige, dass eine Abbildung $f : Y \to X$ genau dann stetig bzgl. $\mathcal{O}_Y$ und der Produkttopologie auf X ist, wenn alle $\mathrm{pr}_k \circ f$ stetig sind.

   Anmerkung: Die $\mathrm{pr}_k \circ f$ sind gerade die „Komponentenfunktionen" f_k von f, wenn die Schreibweise $f(y) = (f_i(y))_i$ verwendet wird. Obige Eigenschaft ist neben Vo. Prop. 5.12 gerade der „Witz" der Produkttopologie! Überlege, was beim Beweis schiefgeht, falls X statt mit der Produkttopologie mit der Boxtopologie versehen wird.