Das kartesische Modell

Abstract
Wir zeigen, dass das kartesische Modell die Axiome der Euklidischen Geometrie erfüllt, also insbesondere, dass die Euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist. Wir diskutieren einige bekannte Sätze der Ebenen Geometrie. Abschließend vergleichen wir die Euklidische Geometrie mit der Sphärischen Geometrie.

Axiomensystem der Euklidischen Geometrie:
Ein 6 –Tupel von Daten ($\mathcal{P}$, $\mathcal{G}$, $\in$, zwischen, $\equiv_1, \equiv_2$) mit
(I_1)- (I_4), (A_1)-(A_5), (K_1)-(K_6), P +Vollständigkeitsaxiome

Axiom V_1 (Archimedisches Axiom)
Seien $\overline{pq}$ und $\overline{rs}$ zwei Strecken. Dann existiert eine natürliche Zahl n, so dass die Strecke $\overline{r_1 s_n}$, die durch n-maliges Abtragen der Strecke $\overline{rs}$ auf der Geraden L(p,q) entsteht, ausgehend von p in Richtung q, die Strecke $\overline{pq}$ enthält.

Axiom V_2 (Maximalität)
Sei ($\mathcal{P}'$, $\mathcal{G}'$, $\in'$, zwischen', $\equiv_1', \equiv_2'$) eine Erweiterung unserer Geometire.
Dann ist $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$ und $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$ d.h
Unsere Geometrie ist nicht mehr erweiterbar, sie ist maximal.

Definitionen (Kartesisches Modell)

- $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ die Menge der Punkte
- $\mathcal{G} := \{L_{p,v} | p, v \in \mathbb{R}^2,\ v \neq 0\}$ die Menge der Geraden mit
  $L = L_{p,v} := \{x \in \mathbb{R}^2 | x = p + t \cdot v, t \in \mathbb{R}\}$, wobei $p, v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, fixiert sind.

Definition 1.2.1
Sei $A \in O(n)$ eine orthogonale Matrix, d.h. sie erfüllt $A \cdot A^t = \mathrm{Id}$, wobei A^t die zu A transponierte Matrix ist. Sei $b \in \mathbb{R}^n$. Dann nennt man die Abbildung
$F_{A,b}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad F_{A,b}(x) = Ax + b,$
eine *euklidische Bewegung*. Der Vektor b wird auch als Translationsanteil bezeichnet.

Für eine fixierte Dimension n bildet die Menge aller euklidischen Bewegungen $E(n) := \{F_{A,b} | A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$ eine Gruppe, die *euklidische Bewegungsgruppe*.

Definition 1.2.2
Zwei Strecken $\overline{pq}$ und $\overline{rs}$ heißen *kongruent*, falls es eine euklidische Bewegung F ∈ E(2) gibt, so dass $\overline{F(p)F(q)} = \overline{rs}$.
Analog nennen wir den Winkel $\angle(p,q,r)$ *kongruent* zu $\angle(p_1,q_1,r_1)$, falls es ein F ∈ E(2) gibt, so dass $\angle(F(p),F(q),F(r)) = \angle(p_1,q_1,r_1)$.

Satz 1.2.3
Mit den von uns gemachten Definitionen ist das Maximalitätsaxiom V_2 gültig.

Beweisführung:

a.) Alte Geraden enthalten keine neuen Punkte, d.h. für $L \in \mathcal{G}$ und $p \in \mathcal{P}'$ mit $p \in' L$ gilt $p \in \mathcal{P}$.

b.) Es gibt keine neuen Punkte, d.h. $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$

c.) Es gibt keine neuen Geraden, d.h. $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$

Die Axiome der ebenen euklidischen Geometrie sind also für das kartesische Modell gültig. Insbesondere sind die Axiome widerspruchsfrei.

Satz 1.2.4 (Kosinussatz der euklidischen Geometrie)

Seien p, q, $r \in \mathbb{R}^2$. Seien $a = \|p - q\|$, $b = \|p - r\|$ und $c = \|q - r\|$ die Seitenlängen des Dreiecks mit den Ecken p, q und r. Sei γ der Innenwinkel in der Ecke p. Dann gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Satz 1.2.5 (Satz von Pythagoras)

Sind die Bezeichnungen wie in Satz 1.2.4 und ist der Winkel γ ein rechter, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, so gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Satz 1.2.6 (Sinussatz der euklidischen Geometrie)

Bezeichnen wir den Winkel in der Ecke q mit β und in der Ecke r mit α, so gilt:

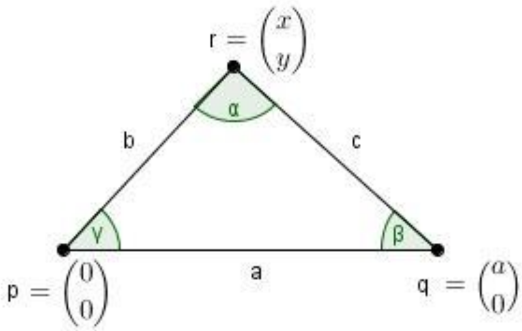
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

Satz 1.2.7 (Winkelsumme im euklidischen Dreieck)

Für die Winkelsumme im euklidischen Dreieck gilt: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

a.) für rechtwinkelige Dreiecke

b.) für allgemeine Dreiecke



Vergleich mit der Sphärischen Geometrie

$\mathcal{P} := S^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$ ist die zweidimensionale Sphäre.

$\mathcal{G}$ … ist die Menge der Großkreise

Folgende Axiome gelten nicht: I_2, A_4

Da sich je zwei Großkreise schneiden gibt es keine Parallelen, der Satz der Existenz einer Parallelen gilt also nicht.