Momentangeschwindigkeit ausging:
Ein Massenpunkt P bewegt sich auf der Zahlengeraden. Seinen Ort zum Zeitpunkt t beschreiben wir mit der Funktion $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto s(t)$. Unsere Anschauung drängt uns dazu, zu glauben, dass P zu jedem Zeitpunkt eine Momentangeschwindigkeit hat. Tatsächlich bestimmbar sind aber nur Durchschnittsgeschwindigkeiten zwischen den Zeitpunkten t_0 und t, also

$$\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

auch mittlere Geschw.

In völliger Analogie zum Tangentenanstieg können wir die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 als den Grenzwert dieser Durchschnittsgeschw. definieren — falls dieser existiert, d.h. dass die Durchschnittsgeschw. genügend „stabil" sind, falls t „in der Nähe" von t_0 variiert. Also

$$v(t_0) := \lim_{t_0 \neq t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} \quad \left[\text{falls existent}\right]$$

Zum Bsp. gilt für den freien Fall $s(t) = \frac{1}{2} g t^2$

Erdbeschleunigung $\sim 9.81\,\mathrm{m s^{-2}}$

und daher

$$\underline{\underline{v(t)}} = \left(\frac{1}{2} g t^2\right)' \underset{\text{1-8(iii)}}{=} \underline{\underline{g t}}$$

Wie auch schon aus der Notation ersichtlich, ist die Momentangeschw. v selbst eine Funktion der Zeit t, d.h. $t \mapsto v(t)$. Die <u>mittlere Beschleunigung</u> von P zwischen t_0 und t ist definiert als der Differenzenquotient

$$\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

und ganz ähnlich zur Momentangeschw. definieren wir die <u>Momentanbeschleunigung</u> zum Zeitpunkt t_0 als

$$b(t_0) := \lim_{t_0 \neq t \to t_0} \frac{v(t)-v(t)}{t-t_0} \quad [\text{falls ex.}]$$

Für den freien Fall ergibt sich also

$$\underline{\underline{b(t)}} = v'(t) = (gt)' = \underline{\underline{g}},$$

was auch den Namen der Konstanten g erklärt.

Erst diese präzisen Definitionen von Momentangeschw. und -beschleunigung ermöglichen einen <u>analytischen Zugriff</u> auf Newtons Kraftgesetz (2. Newtonsches Axiom)

Kraft = Masse · Beschleunigung

nämlich $F(t) = m \cdot v'(t) = m \cdot s''(t)$

Klassische Mechanik in der Physik

1.12 BEM (Diffbarkeit vs Stetigkeit)

Bsp 1.8(vi) zeigt, dass die Stetigkeit einer Fkt f im Pkt ξ **nicht** die Differenzierbarkeit von f in ξ impliziert. Die Umkehrung ist aber richtig, wie das nächste Thm zeigt. Insgesamt gilt also für $f: I \to \mathbb{R}$, $\xi \in I$

$$\boxed{f \text{ diffbar in } \xi \quad \substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow} \quad f \text{ stetig in } \xi}$$

1.13 Thm (diffbar $\Rightarrow$ stetig)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls f differenzierbar in $\xi \in I$ ist, dann ist f in ξ auch stetig.

Beweis. Sei $I \ni x \neq \xi$, dann gilt lt. Voraussetzung

$$f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\,(x - \xi) \xrightarrow{(x \to \xi)} f'(\xi) \cdot 0 = 0,$$

also $f(x) \to f(\xi)$ und mit [2] Prop 1.26 folgt dass f stetig in ξ ist. $\square$

1.14 MOTIVATION (Weiteres Vorgehen)

Ein wichtiger Aspekt beim Studium neuer Begriffe – hier Differenzierbarkeit – ist es immer, möglichst viele (Klassen von) Beispielen und Nicht-Bsp zu finden.

mühsam

Um dabei nicht immer auf die Def zurückgreifen zu müssen, werden wir hier wie in [2] §1 im Falle der Stetigkeit ein „Baukastensystem" etablieren [vgl. [2] 1.16] und uns darum kümmern, ob die Grundoperationen für Fkt ([1] 1.3) die Differenzierbarkeit erhalten. Ganz mühelos werden wir dabei die aus der Schulmathematik bekannten Differentiationsregeln (wieder-) entdecken.

1.15 PROP (Grundops & Diffbarkeit – Differentiationsregeln)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\xi \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ diffbar in ξ. Dann gilt

(i) (Linearkombinationen) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda f + \mu g$ diffbar in ξ und es gilt

$$(\lambda f + \mu g)'(\xi) = \lambda f'(\xi) + \mu g'(\xi).$$

(ii) (Leibniz- oder Produktregel) $f \cdot g$ ist diffbar in ξ und es gilt

$$(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) g(\xi) + f(\xi) g'(\xi)$$

(iii) (Quotientenregel) Falls $g(\xi) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ diffbar in ξ und es gilt

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g(\xi)^2}}$$

Beweis: (i) Folgt sofort aus den Grenzwertsätzen [1] 2.25 [UE]

(ii) Sei $0 \neq h$ mit $\xi + h \in I$. Dann gilt

$$\frac{f(\xi+h)g(\xi+h) - f(\xi)g(\xi)}{h} \underset{\text{Trick}}{=} \frac{1}{h}\Big(f(\xi+h)\big(g(\xi+h) - g(\xi)\big) + \big(f(\xi+h) - f(\xi)\big)g(\xi)\Big)$$

$$= f(\xi+h)\,\frac{g(\xi+h) - g(\xi)}{h} + \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h}\,g(\xi)$$

$$\xrightarrow[{[1]\ 2.25}]{0 \neq h \to 0} f(\xi)\,g'(\xi) + f'(\xi)\,g(\xi)$$

f stetig in ξ [1.13]

(iii) Sei zunächst $f(x) = 1$ auf I. Für $0 \neq h$ mit $\xi + h \in I$ gilt

$$\frac{\frac{1}{g(\xi+h)} - \frac{1}{g(\xi)}}{h} = \frac{g(\xi) - g(\xi+h)}{h\,g(\xi)\,g(\xi+h)} \xrightarrow{[1]\ 2.23\ \&\ 2.26,\ 1.13} -\frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2}$$

also $$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(\xi) = -g'(\xi)/g^2(\xi)} \quad (*)$$

auch unabhängig wichtig

Der allgemeine Fall folgt nun aus (ii)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(\xi) \overset{(ii)}{=} f'(\xi)\,\frac{1}{g}(\xi) + f(\xi)\left(\frac{1}{g}\right)'(\xi)$$

$$\overset{(*)}{=} f'(\xi)\,\frac{1}{g}(\xi) - f(\xi)\,\frac{g'(\xi)}{g^2(\xi)}$$

$$= \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}.$$

]

1.16 BSP (Weitere diffbare Fkt)

Ganz im Sinne von 1.14 wenden wir nun 1.15 an und holen reiche Ernte!

(i) (Einfache rationale Fkt)

kein Intervall aber Vereinigung zweier Intervalle

Sei $\mathbb{N} \ni n \geq 1$ und $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/x^n$,

dann gilt wegen 1.15(iii) $[1/x^n \neq 0\ \forall x \neq 0]$

oder auch (*) im Beweis von 1.15(iii) — was ja ein einfacher Spezialfall ist

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' \underset{1.8(iii)}{=} \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}},$$

d.h. $\boxed{(x^{-n})' = -n x^{-n-1}.}$

(ii) $\tan: \mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + \pi\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ ist diffbar und es gilt

$$\underbrace{(\tan x)'}_{\boxed{2}\ 3.25(i)} = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \underset{\substack{1.15(iii)\\1.8(v)}}{=} \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

(iii) Polynome und rationale Fkt sind überall diffbar. [Details UE]

1.17 MOTIVATION (Differentiation als lineare Approximation)

Bevor wir unser Baukastensystem aus 1.15 [vgl. 1.14] erweitern (können) werfen wir noch einen weiteren Blick auf den Begriff der Differentiation – diesen Gesichtspunkt der

> Ableitung als lineare Approximation an die ursprüngliche Funktion

haben wir schon in 1.1(iii) angedeutet. Aber Achtung: Obwohl er in der Schulmathematik eine untergeordnete Rolle spielt, ist er der in der Mathematik insgesamt bestimmende Aspekt des Begriffs der Differenzierbarkeit!

Er ermöglicht – im Gegensatz zum Zugang mittels Differenzenquotient – weitreichende Verallgemei- (siehe 3. Teil der VO) nerungen und is sozusagen <u>der</u> Kern der Sache.

Wir beginnen mit einer einfachen Umformulierung von Bekanntem.

<u>1.18 BEM</u> (Differentialquotient vs. lin. Approx.)

(i) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in I$ mit $f'(\xi) =: a \in \mathbb{R}$.
Dann gilt nach Def 1.6(i)

$$0 = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - a = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - ah}{h} \, . \quad (*)$$

Das kann man nun aber auch so interpretieren:
Die lineare Funktion $h \mapsto a \cdot h$ ist (im Sinne von $(*)$) eine Approximation der Fkt $h \mapsto f(\xi+h) - f(\xi)$; mehr dazu in 1.20 unten.

(ii) Umgekehrt ang $\exists a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $(*)$ d.h.

$$\lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - ah}{h} = 0,$$

dann gilt $\lim 1/h \left(f(\xi+h) - f(\xi)\right) = a$ und somit ist f in ξ diffbar mit $f'(\xi) = a$.
Insgesamt haben wir also gezeigt

(iii) $$\boxed{f \text{ diffbar in } \xi \iff \exists a \in \mathbb{R}: \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - ah}{h} = 0}$$

und in diesem Fall ist $f'(\xi)=a$.

Eine auch praktisch besser verwendbare Weiterführung dieser Idee halten wir als Thm fest.

1.19 THM (Differenzierbarkeit mittels lin. Approx.)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine reelle Fkt auf einem Intervall und sei $\xi \in I$. Dann gilt

$$f \text{ diffbar in } \xi \iff \begin{array}{l} \exists a \in \mathbb{R} \;\; \exists \text{ Fkt } r: I \to \mathbb{R} \text{ sodass} \\ f(\xi+h)-f(\xi) = a\cdot h + r(h) \\ \text{und } \lim\limits_{0 \neq h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0 \end{array}$$

In diesem Fall gilt $f'(\xi) = a$.

1.20 BEM (Zur Bedeutung von Thm 1.19)

(i) Um die Bedeutung von 1.19 besser zu verstehen definieren wir das Inkrement der Fkt f bei ξ als

$$\varphi(h) = f(\xi+h) - f(\xi).$$

Zunahme von f zwischen ξ u. $\xi+h$

Dann besagt 1.19 im Fall der Diffbarkeit, dass

$$\varphi(h) = f'(\xi)\cdot h + r(h),$$

d.h. dass das Inkrement bis auf einen „Fehler" $r(h)$ proportional zur Zunahme der unabhängigen Variablen h ist – der Proportionalitätsfaktor ist genau $f'(\xi)$

$$\varphi(h) = f(\xi+h) - f(\xi) \approx f'(\xi) \cdot h$$

Oder noch anders: Die Inkrementfunktion $h \mapsto \varphi(h)$ wird bis auf den „Fehler" $r(h)$ durch die lineare Fkt $h \mapsto f'(\xi) \cdot h$ approximiert.

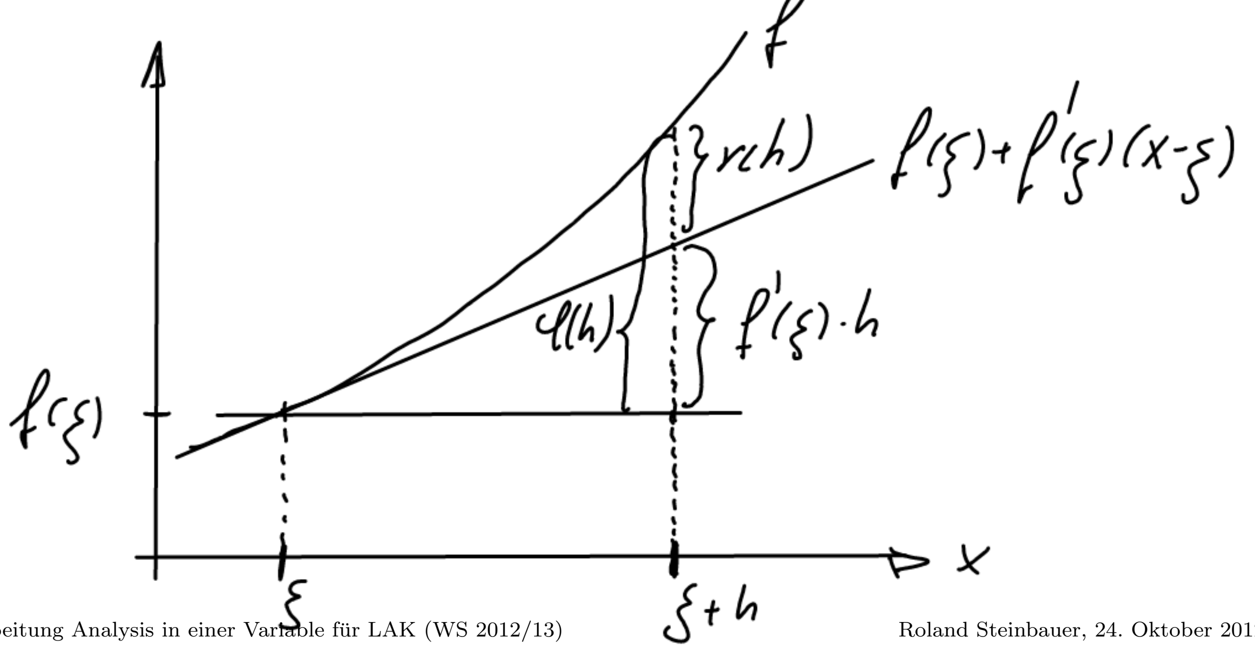
(ii) Geometrisch bedeutet das nichts anderes als [vgl. 1.1 (iii)] dass die Tangente an f im Pkt ξ definiert als

$$g(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)$$

im präzisen Sinne von 1.18 für x nahe ξ (d.h. für kleine h) eine gute Approximation ist [weil 1.18 sagt ja

$$f(\xi+h) = f(\xi) + f'(\xi)h + r(h).$$

]



(iii) Besondere Beachtung verdient auch das Verhalten des „Fehlers" r [r für Rest]. Dieser erfüllt nicht nur $r(h) \to 0$ $(h \to 0)$ sondern sogar

$$\frac{r(h)}{h} \to 0 \quad (h \to 0)$$

Oft schreibt man dafür auch $r(h) = o(h)$

klein oh von h

(iv) Damit sieht man auch besonders schön, dass [oder sogar worin] Diffbarkeit stärker ist als Stetigkeit [vgl. 1.12]. Es gilt ja [2] 1.26]

$$f \text{ stetig in } \xi \iff f(\xi+h) - f(\xi) \to 0$$

nur das & nicht mehr

Wählen wir also irgendein $a \in \mathbb{R}$ und schreiben

$$f(\xi+h) - f(\xi) = a \cdot h + r(h) \quad [\text{d.h. } r(h) := f(\xi+h) - f(\xi) - ah]$$

dann gilt

$$f \text{ stetig in } \xi \iff r(h) \to 0$$

und es ist keine Rede von $\frac{r(h)}{h} \to 0$ oder davon, dass a eindeutig bestimmt ist — was ja aus dem Zusatz in 1.18 folgt. [siehe auch UE]

Nach dieser langen Bem zum erfreulich kurzen

Beweis von 1.19

„$\Rightarrow$": Setze $r(h) = f(\xi+h) - f(\xi) - f'(\xi)h$. Für $0 \neq h$ mit $\xi + h \in I$ gilt dann

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - f'(\xi) \xrightarrow{(h\to 0)} f'(\xi) - f'(\xi) = 0$$

„$\Leftarrow$": Sei wieder $0 \neq h$ mit $\xi+h \in I$. Laut Voraussetzung gilt

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = a + \frac{r(h)}{h} \to a + 0 \ (h \to 0),$$

also ist f diffbar in ξ mit $f'(\xi) = a$ $\square$

1.21 Bsp (Der Sinus bei 0)

Wir veranschaulichen die Situation von 1.19 am Bsp der Sinusfkt: $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$1.8\,(v) \Rightarrow \sin'(x) = \cos(x) \Rightarrow \sin'(0) = \cos(0) \overset{\boxed{2}\,3.22(ii)}{=} 1 \ (*)$$

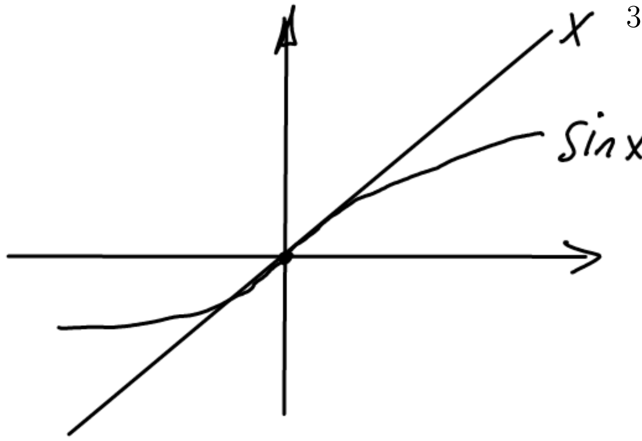
$$1.19 \overset{\xi=0}{\Longrightarrow} \quad \sin(h) = \sin(0+h)$$
$$= \sin(0) + \sin'(0)\cdot h + r(h)$$
$$\overset{\boxed{2}\,3.22(ii)\,(*)}{=} 0 + h + r(h)$$
$$= h + r(h)$$

mit $r(h) = \sin(h) - h = o(h)$

das wissen wir im übrigen auch schon aus $\boxed{2}$ 3.17 (vi)

$$\frac{\sin h}{h} \to 1$$

Graphisch bedeutet das, dass sin nahe 0 wie id aussieht.



1.22 MOTIVATION (Zurück zum Baukasten)

Jetzt kehren wir endlich wieder zu unserem Baukastensystem zurück und erweitern ihn. Prop 1.15 hat ja schon einiges gebracht [siehe auch UE], aber zum ganzen Glück fehlt uns noch die Verträglichkeit der Differentiation mit der Verknüpfung [vgl auch [2] 1.17(ii) im Fall der Stetigkeit]. Sie wird uns auch die Türe zur Differentiation der Umkehrfunktion öffnen. Kurz gesagt, wir marschieren in Richtung Kettenregel und Inversenregel – dabei können wir die Rostschreibweise aus 1.18 gleich gut gebrauchen [müssten wir aber nicht verwenden vgl. [Hö], Beweis von Thm 7.9]

1.23 THM (Kettenregel) Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und seien $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ reelle Fkt sodass $f(I) \subseteq J$.

sonst ist die Verknüpfung nicht def. vgl. [2] 1.3(iii)

Ist f diffbar in $\xi \in I$ und ist g diffbar in $\eta := f(\xi) \in J$, dann ist die Verknüpfung $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in ξ und es gilt $(g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$

1.24 BEM (Zur Kettenregel)

(i) (Schreibweise) In der Leibnitz'schen Schreibweise hat die Kettenregel die folgende suggestive Form

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{d\xi}$$

Wobei hier g mittels Verknüpfung mit f als Fkt von ξ zu verstehen ist, also $g(\xi) := g \circ f(\xi)$.

(ii) (Beweisidee für 1.23) Folgende (einfache & brutale) Beweisstrategie/Rechnung ist naheliegend: Sei $\xi \neq x \in I$, dann gilt

$$\frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi} = \frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{f(x) - f(\xi)} \; \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Dieser Ausdruck muß ja berechnet werden

Trick?

$$\longrightarrow g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$$

Das Problem dabei ist aber, dass $f(x) - f(\xi) = 0$ gelten könnte. Somit ist der Trick zwar nett, funktioniert aber nicht unmittelbar. Er kann direkt repariert werden (siehe [Hö, 7.9]) oder man kann (wie wir es gleich tun werden) das Problem mittels der Rest-Schreibweise aus 1.19 umgehen.

<u>Beweis von 1.23.</u> Wir verwenden 1.18 um die Voraussetzung umzuschreiben (h, k sodass $\xi + h \in I$, $\eta + k \in J$)

$$f \text{ diff'bar in } \xi \overset{1.18}{\Longrightarrow} f(\xi+h) - f(\xi) = f'(\xi)h + r_1(h) \quad \text{mit}$$
$$\rho_1(h) := \frac{r_1(h)}{h} \to 0 \quad (h \to 0) \qquad (*)$$

$$g \text{ diff'bar in } \eta \overset{1.18}{\Longrightarrow} g(\eta+k) - g(\eta) = g'(\eta)k + r_2(k) \quad \text{mit}$$
$$\rho_2(k) := \frac{r_2(k)}{k} \to 0 \quad (k \to 0) \qquad (**)$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
g\circ f(\xi+h) - g\circ f(\xi) &= g(f(\xi+h)) - g(f(\xi)) \\
&\overset{(**)}{=} g'(\eta)\big(f(\xi+h) - f(\xi)\big) + r_2\big(f(\xi+h) - f(\xi)\big) \\
&\overset{(*)}{=} g'(\eta)\big(f'(\xi)h + r_1(h)\big) \\
&\qquad + r_2\big(f'(\xi)h + r_1(h)\big) \\
&= g'(\eta)f'(\xi)h + r(h), \qquad (***)
\end{aligned}
$$

Diesen Ausdruck müssen wir anschauen vgl. 1.18

$k = f(\xi+h) - f(\xi)$, $\eta = f(\xi)$

wobei

$$
\begin{aligned}
r(h) &= g'(\eta)r_1(h) + r_2\big(f'(\xi)h + r_1(h)\big) \\
&\overset{(*),(**)}{=} g'(\eta)\rho_1(h)\cdot h + \rho_2\big(f'(\xi)h + r_1(h)\big)\cdot\big(f'(\xi)h + r_1(h)\big)
\end{aligned}
$$

und daher

$$r(h)/h = g'(f(\xi))\underbrace{\rho_1(h)}_{\to 0} + \underbrace{\rho_2\big(\overset{\to 0}{f'(\xi)h} + \overset{\to 0}{r_1(h)}\big)}_{\to 0}\big(f'(\xi) + \rho_1(h)\big)$$
$$\to 0 \quad (h \to 0).$$

Nun folgt mit (der Rückrichtung von) 1.18, dass $g \circ f$ diffbar in ξ ist mit $(g \circ f)'(\xi) \underset{(***)}{=} g'(f(\xi))f'(\xi)$. $\square$

1.25 BEM (Ableitung der Umkehrfkt) Seien I, J Intervalle.

Sei $f : I \to J \subseteq \mathbb{R}$ eine reelle bijektive Fkt auf einem Intervall. Angenommen f ist diffbar in $\xi \in I$ und die Umkehrfkt $f^{-1} : J \to I$ ($\exists$ weil f bijektiv) ist diffbar in $\eta = f(\xi)$. Wir können daher die Kettenregel in ξ anwenden auf

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_I \qquad [\text{vgl. EMA 4.3.30}]$$

Das ergibt $$(f^{-1} \circ f)'(\xi) \overset{1.23}{=} (f^{-1})'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) = \mathrm{id}'(\xi) \overset{1.8(ii)}{=} 1. \quad (*)$$

Insbesondere gilt also $f'(\xi) \neq 0$ und wir können $(*)$ mit $\xi = f^{-1}(\eta)$ umschreiben zu

$$\boxed{(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}}$$

Bemerke, dass wir in dieser Aussage die Diffbarkeit von f^{-1} in η vorausgesetzt haben. Eine Möglichkeit die Diffbarkeit von f^{-1} aus der von f zu folgern lernen wir als nächstes kennen.

1.26 Erinnerung / Motivation (Umkehrfkt) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to f(I) =: J$ stetig und streng monoton. Dann besagt [2] Thm 2.18, dass J ein Intervall, f bijektiv und $f^{-1}: J \to I$ stetig & str. monoton ist.
Wir werden nun zeigen, dass dann aus der Diffbarkeit von f in $\xi \in I$ unter der Bedingung $f'(\xi) \neq 0$ schon die Diffbarkeit von f^{-1} in $\eta = f(\xi)$ folgt. Wegen 1.25 ist diese Bedingung auch notwendig!

1.27 THM (Diffbarkeit der Umkehrfkt)
Sei $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf dem Intervall I. Ist f diffbar in ξ mit $f'(\xi) \neq 0$, dann ist die Umkehrfkt $f^{-1}: J := f(I) \to I$ diffbar in $\eta := f(\xi)$ und es gilt

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}$$

Beweis. Sei $(\eta_n)_n$ eine Folge in $J \setminus \{\eta\}$ mit $\eta_n \to \eta$.

f bij. $\Longrightarrow$ $(\xi_n) := (f^{-1}(\eta_n))$ ist Folge in $I \setminus \{\xi\}$
f^{-1} stetig $\Longrightarrow$ $\xi_n \to \xi$
Daher gilt

f diffbar in ξ, $f'(\xi) \neq 0$, [1] 2.26

$$\frac{f^{-1}(\eta_n) - f^{-1}(\eta)}{\eta_n - \eta} = \frac{\xi_n - \xi}{f(\xi_n) - f(\xi)} \longrightarrow \frac{1}{f'(\xi)} \quad (n \to \infty)$$

und (wegen 1.6(ii), 1.4) ist f^{-1} diffbar in η mit Ableitung

$$(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi) = 1/f'(f^{-1}(\eta)).$$

$\square$

1.28 BSP (Ableitung des Logarithmus und eine berühmte Formel)

(i) Die Logfkt ist diffbar auf $(0,\infty)$ [also auf ihrem ganzen Defbereich] und es gilt

[vgl. [2] 3.2]

$$\boxed{\log'(x) = 1/x}$$

Tatsächlich ist $\log = \exp^{-1}$ [[2], 3.2(iii), so ist log definiert!] und exp ist diffbar auf ganz $\mathbb{R}$ [1.8(iv)] mit $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$ [[1] 4.40(i)]. Also können wir 1.27 anwenden und erhalten

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

(ii) Mittels (i) können wir die berühmte Formel

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

herleiten, die oft auch als Definition der Eulerschen Zahl verwendet wird. [Wir haben e ja als $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ definiert, vgl [1] 4.37.]
Es gilt