(iii) Lipschitz stetige Fkt sind stetig, ja sogar glm. stetig. Die jeweiligen Umkehrungen sind falsch, d.h. für $f: I \to \mathbb{R}$ gilt (jeweils auf I)

$$\boxed{\text{Lipschitz stetig} \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; \text{glm stetig} \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; \text{stetig.}}$$ [12] 2.15

Details siehe UE.

(iv) Wir können 2.14(i) nun auch so ausdrücken:
Diffbare Fkt mit beschränkter Ableitung sind nicht nur (glm.) stetig sondern sogar Lipschitz stetig.

Beweis (von 2.14 – erfreulich einfach ☺)

(i) Sei f wie in der Behauptung. Dann gilt $\forall x_1, x_2 \in [a,b]\ \exists \xi \in (a,b)$:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \overset{(2.1)}{=} |f'(\xi)|\,|x_2 - x_1| \overset{\text{lt. Vorauss.}}{\leq} C\,|x_2 - x_1|. \quad (*)$$

(ii) Lt. Voraussetzung ist $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$ — Verwende (i) mit $C=0$

$$\underset{C=0}{\overset{(*)}{\Longrightarrow}} f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b]$$

$\square$

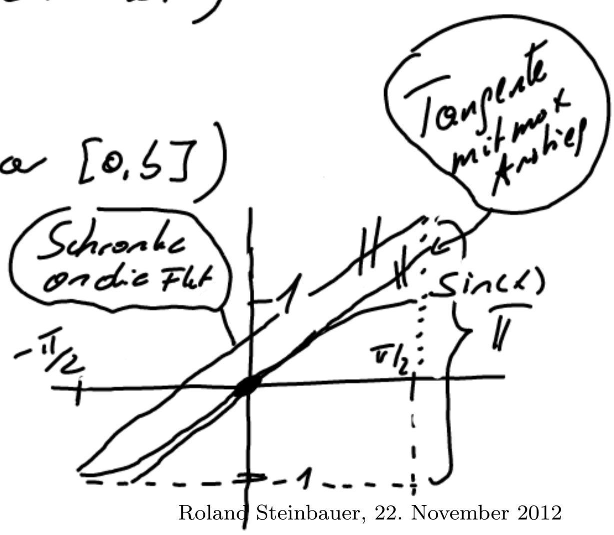
2.16 BSP (Sinus ist dehnungsbeschränkt)

Sei $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$

$\Longrightarrow f'(x) = \cos(x)\ \forall x \in (a,b)$ (sogar $[a,b]$)

$\Longrightarrow |f'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$

$$\overset{2.14(i)}{\Longrightarrow} \boxed{|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y| \quad \forall x,y \in [a,b]}$$



2.17 PROP (Monotonie via Ableitung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf (a,b). Dann gilt

(i) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f$ mon. wachsend auf $[a,b]$

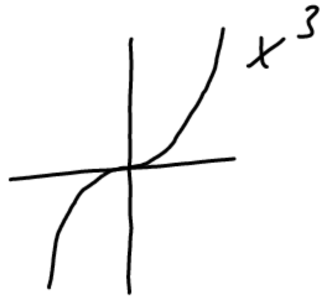
(ii) $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \implies f$ str. mon. wachs. auf $[a,b]$

(iii) Beide Punkte (i) & (ii) gelten analog für $f'(x) \underset{(<)}{\leq} 0$ und (str.) mon. fallend.

2.18 WARNUNG! Die Umkehrung von (ii) ist falsch, d.h.

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \not\Longleftarrow f \text{ str. mon. wachs. auf } [a,b].$$

Die Ableitung str. mon. Fkt kann in einzelnen Pkten verschwinden, wie etwa $f(x) = x^3$ lehrt:
Es gilt f ist str. mon. wachsend, etwa auf $[-1,1]$ aber $f'(0) = 0$!



Beweis (von 2.17).

(i) „$\Rightarrow$" und (ii): Indir. ang f ist nicht (str.) mon. wachs.

$$\implies \exists\, x_1 < x_2 \in [a,b] \text{ mit } f(x_1) > f(x_2)$$

$$(\text{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2))$$

$$\overset{\text{MWS}}{\implies} \exists\, \xi \in (x_1, x_2) \text{ mit}$$

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\implies f'(\xi) < 0 \ (\text{bzw } f'(\xi) \leq 0) \quad \text{Widerspr } \lightning$$

(i) „⇐": Da f mon. wachsend, gilt $\forall x, \xi \in (a,b)$, $x \neq \xi$

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} \geq 0$$

$\xi > x \Rightarrow$ Zähler & Nenner ≥ 0
$\xi < x \Rightarrow$ — " — ≤ 0

$$\Longrightarrow f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in (a,b)$$

$\square$

2.19 KOR (Hinreichende Bedingung f. lok Extr)

Sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar, sei $\xi \in (a,b)$ und sei f 2-mal diffbar in ξ. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi) = 0 \\ f''(\xi) > 0 \ \ (f''(\xi) < 0) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

f hat ein striktes lok. Min (Max) im Punkt ξ

Beweis. Sei ξ wie oben und $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) > 0$ [der Fall $f''(\xi) < 0$ ist völlig analog]

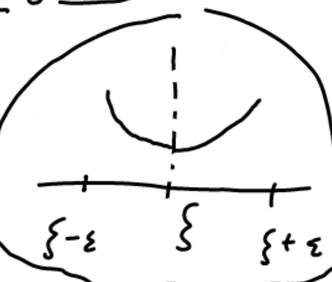
$$\Longrightarrow \quad 0 < f''(\xi) = \lim_{\xi \neq x \to \xi} \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x}$$

?Erkl?

$$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ sodass } \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$$

$f'(\xi) = 0$

$$0 < \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} = - \frac{f'(x)}{\xi - x}$$



$$\Longrightarrow \left.\begin{cases} \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi): \ f'(x) < 0 \overset{2.17}{\Longrightarrow} f \text{ str. mon f.} \\ \forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon): \ f'(x) > 0 \overset{2.17}{\Longrightarrow} f \text{ str. mon. w} \end{cases}\right\} \Rightarrow \xi \text{ ist str. Min}$$

$\square$

2.20 Bsp (Nochmals Extrema des Sin)

Wie in 2.5 wiederholt wissen wir seit [2] 3.24(ii), dass die Extrema des sinus in $\pi/2 + \mathbb{Z}\pi$ liegen.
Wie in 2.5 nachgeprüft, gilt klarerweise die notwendige Bedingung für Extrema 2.4.
Es sind auch die jeweiligen hinreichenden Bedingungen aus 2.19 erfüllt:

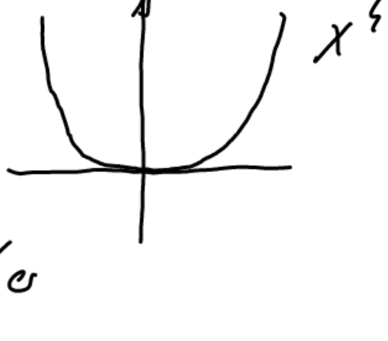
$$\sin'\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \cos\left(\pi/2+k\pi\right) \overset{[2]\,3.22(iv)}{=} 0$$
$$\sin''\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \begin{cases} +1 & k \text{ ungerade} \\ -1 & k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{Minima in } \frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$$
$$\text{Maxima in } \frac{\pi}{2}+2k\pi$$

2.21 WARNUNG (Hinreichend nicht notwendig!)

Die Bedingung 2.19 ist nicht notwendig, wie das Bsp $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$

$$f(x) = x^4$$



zeigt: f hat ein striktes lokales Min in $\xi=0$ $[f(x)=x^4>0 \ \forall x\neq 0]$ aber $f''(x)=12x^2$ und damit $f''(0)=0$.

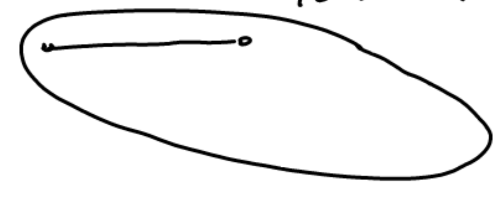
2.22 MOTIVATION (Konvexität)

Als nächsten Begriff den wir mittels Differentialrechnung beschreiben können befassen wir uns mit dem

Krümmungsverhalten von Fkt und mit dem Begriff

KONVEXITÄT

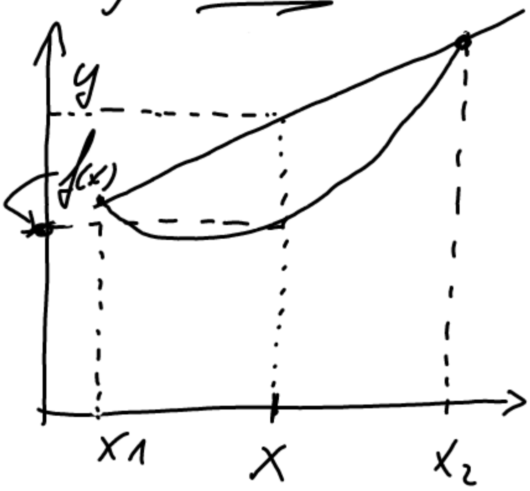
konvex



nicht konvex

(i) Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ wird konvex genannt, wenn mit je zwei Punkten schon die gesamte Verbindungsgerade in der Menge liegt.

(ii) Eine Fkt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ werden wir konvex nennen (offizielle Definition), falls die Menge über ihrem Graphen konvex ist. Anders ausgedrückt, falls die Sekante zwischen je 2 Pkten über dem Graphen liegt.



(iii) Diese Idee formalisieren wir wie folgt: Für $\lambda\in[0,1]$ durchläuft

$$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$$

das ganze Intervall $[x_1,x_2]$. Analog durchläuft

$$y=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

die Sekante von $f(x_2)$ bis $f(x_1)$. Jetzt brauchen wir nur noch $f(x)$ mit y zu vergleichen: Ist $y\geq f(x)$, so liegt die Sekante über der Kurve.

Jetzt offiziell

2.23 DEF (Konvexe Fkt) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt auf dem Intervall I.

(i) Wir nennen f <u>konvex</u> (linksgekrümmt), falls $\forall x_1, x_2 \in I$ und $\forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

gilt.

(ii) Wir nennen f <u>konkav</u>, falls $-f$ konvex ist.

konkave Fkt

2.24 PROP (Konvexität via f'')

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar. Dann gilt

$$f \text{ konvex} \iff f''(x) \ge 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

NICHT VORGETRAGEN

<u>Beweis</u>: „$\Leftarrow$" Wir prüfen die Bedingung in 2.23(i) nach. Dazu sei (oBdA) $x_1 < x_2$ und $0 < \lambda < 1$. Wir setzen

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \quad [\Rightarrow x_1 < x < x_2]$$

$$\overset{2.17(i)}{\Longrightarrow} \quad f' \text{ ist mon wachsend auf } [x_1, x_2]$$

$$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \quad \exists \xi_1 \in (x_1, x) \ \exists \xi_2 \in (x, x_2) \text{ mit}$$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \le f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad (*)$$

Es gilt
$$x - x_1 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1) > 0$$
$$x_2 - x = x_2 - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2 = \lambda(x_2 - x_1) > 0$$

und damit folgt aus (*)

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{1-\lambda} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{\lambda}$$

und daher

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

NICHT VORGETRAGEN

„$\Rightarrow$" Indirekt ang. $\exists \xi$ mit $f''(\xi) < 0$. Wir setzen

$$\varphi(x) = f(x) - f'(\xi)(x-\xi) \qquad (x \in I) \qquad (*)$$

Dann gilt
- φ ist 2-mal diffbar auf I
- $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0$
- $\varphi''(\xi) = f''(\xi) < 0$

$\overset{2.19}{\Longrightarrow}$ φ hat ein striktes lok. Maximum in ξ

$\overset{2.2(ii)}{\Longrightarrow}$ $\exists \varepsilon_0 > 0:\ \varphi(x) < \varphi(\xi)\ \forall x \in U_{\varepsilon_0}(\xi) \subseteq I$

Insbesondere gilt für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\varphi(x-\varepsilon) < \varphi(\xi), \quad \varphi(x+\varepsilon) < \varphi(\xi) \text{ und daher}$$

$$f(\xi) = \varphi(\xi) > \frac{1}{2}\big(\varphi(\xi-\varepsilon) + \varphi(\xi+\varepsilon)\big) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\big(f(\xi-\varepsilon) + f(\xi+\varepsilon)\big) \quad (**)$$

Setzen wir nun $\lambda = 1/2$, $x_1 = \xi - \varepsilon$, $x_2 = \xi + \varepsilon$, dann lautet (**)

$$f\big(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2}_{\xi}\big) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad \lightning \text{ zur Konvexität}$$

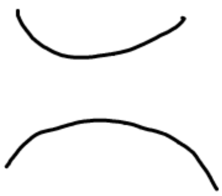
$\square$

2.25 BSP (Konvexe & konkave Fkt)

(i) (Quadratische Polynome) Sei $f(x)=ax^2+bx+c$ $(x\in\mathbb{R})$ mit $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

Es gilt $f''(x)=2a$ und damit (wegen 2.24)

$$f \text{ konvex} \iff a>0$$
$$f \text{ konkav} \iff a<0$$



(ii) Die <u>Exponentialfkt</u> ist <u>konvex</u>, denn

$\exp''(x)=\exp(x)>0$ [1.8(iv), [1] 4.40(i)]

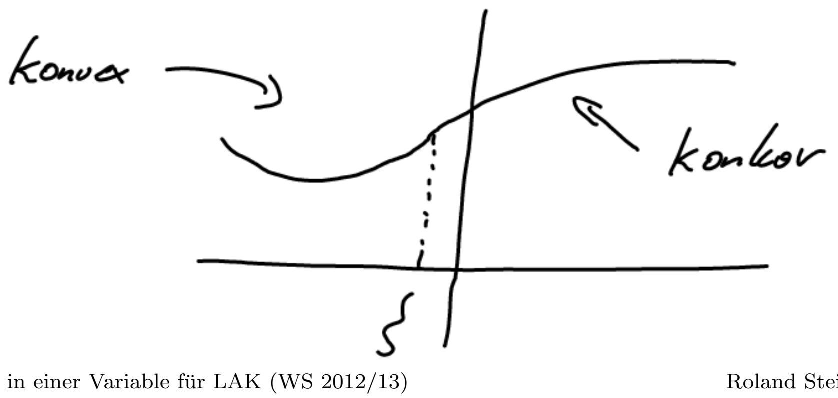
(iii) Die Logarithmusfkt ist konkav, denn

$\log''(x)=\left(1/x\right)'=-1/x^2<0$ [1.28(i),(iii)]

2.26 BEM (Wendestellen)

(i) Punkte $\xi\in I$ in denen eine Fkt $f:I\to\mathbb{R}$ ihr Krümmungsverhalten ändert heißen <u>Wendepunkte</u> oder <u>Wendestellen</u>.

In einer Wendestelle ändert f ihr Verhalten von konkav auf konvex oder umgekehrt



(iii) Falls f genügend oft differenzierbar ist, dann besagt 2.26, dass eine Wendestelle ein Pkt ist, indem f'' das Vorzeichen wechselt, also insbesondere eine Nullstelle von f''!

Analog zum Fall lok. Extrema gibt es daher eine notwendige Bedingung für Wende-pkte ξ $[\, f''(\xi)=0 \,]$ und eine hinreichende Bedingung $[\, f''(\xi)=0,\ f'''(\xi)\neq 0 \,]$.
[Details UE]

2.27 MOTIVATION (Die Regeln von De L'Hospital)

(i) Das Problem: Bei der Berechnung von Grenzwerten der Form

$$\lim_{x\to\xi} f(x)/g(x)$$

tritt öfter einer der nicht definierten Fälle „0/0", „$\pm\infty/\pm\infty$" auf, wie etwa in

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\exp(x)}{x^k},\quad \lim_{x\to 0} x\log x=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x)}{1/x}.$$

Zwar haben wir diese Probleme – jeweils mit passenden Methoden / Tricks geknackt [[2] 3.8, [2] 3.17 (viii)], praktisch wäre allerdings eine allgemeine Methode. Eine solche kann mit Hilfe der Differentialrechnung tatsächlich angegeben werden.

(ii) Die Idee. Wir betrachten den Fall „0/0". Seien also f, g diffbar und $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0 = \lim_{x\to\xi} g(x)$ und $g'(x) \neq 0$ $\forall x$.
Dann gilt [1.13] $f(\xi) = 0 = g(\xi)$ und somit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} = \frac{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}{\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}} \longrightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (*)$$

Wir dürfen also darauf hoffen, den limes $f(x)/g(x)$ durch den limes $f'(x)/g'(x)$ ersetzen zu können.

Tatsächlich wird uns dies gelingen. Zunächst benötigen wir eine technische Verallgemeinerung des MWS.

2.28 Lemma (Verallgemeinerter MWS)
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig & diffbar auf (a,b). Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a,b)$ mit

$$(f(b)-f(a))\, g'(\xi) = (g(b)-g(a))\, f'(\xi).$$

2.29 Bem (zum VMWS) Falls $g'(x) \neq 0$ auf (a,b) und damit auch $g(b)-g(a) \neq 0$ [MWS $\Rightarrow$ $\exists$ $\xi \in (a,b)$. $g(b)-g(a) = g'(\xi)(b-a)$; $g'(\xi) \neq 0$ $\forall \xi \in (a,b) \Rightarrow g(b)-g(a) \neq 0$] können wir die Formel in 2.28 umschreiben zu

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Und das ist schon ein Teil des heuristischen Arguments (*) in 2.26 (ii).

Beweis von 2.28. Wende den Satz von Rolle auf die Fkt $\varphi(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$ $(x \in [a,b])$ an. Details siehe [UE]. $\square$

2.30 SATZ (Regeln von de l'Hospital)

Seien $f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ diffbar und sei $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Sei außerdem

(i) $\lim_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \searrow a} g(x)$, oder

(ii) $\lim_{x \searrow a} g(x) = \pm\infty$.

Dann gilt
$$\boxed{\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},}$$

falls der rechte Limes (evtl. als uneigentl. Limes $\pm\infty$) existiert. Analoges gilt für den Limes $x \nearrow b$.

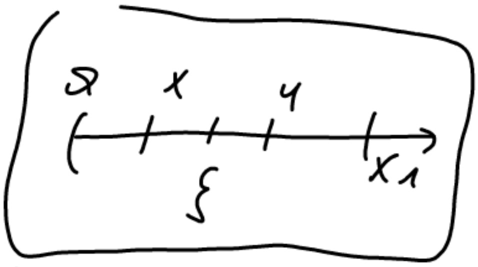
Beweis. Wir betrachten nur den Fall $x \searrow a$.

(1) Sei zunächst

$$(*) \qquad \eta := \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

AUF FOLIE VORGETRAGEN

Wir wählen y_0, y_1 mit $\eta < y_1 < y_0$



$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \exists\, x_1 \in (a,b)$ sodass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < y_1 \quad \forall x \in (a, x_1) \qquad (**)$$

Seien nun $x, u \in (a, x_1) \overset{(\text{VMWS})}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (x,u)$:

$g(x)-g(u) \neq 0$ vgl. 2.28

$$\frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \overset{(**)}{<} y_1 < y_0 \quad (***)$$

Im Fall (i) gilt für $x \searrow a$ wegen $(***)$

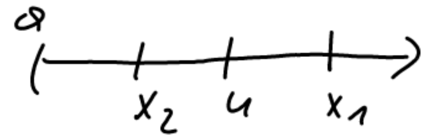
$$\boxed{\frac{f(u)}{g(u)} \le y_1 < y_0} \quad \forall u \in (a, x_1) \quad (\Delta)$$

Im Fall (ii) müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir behandeln nur $g(x) \to +\infty$, der andere Fall ist analog.

Zu jedem $u \in (a, x_1)$ bestimmen wir ein $x_2 \in (a, u)$ sodass

$$g(x) > \max\{0, g(u)\} \quad \forall x \in (a, x_2)$$

$$\Longrightarrow \frac{g(x)-g(u)}{g(x)} > 0 \quad \forall x \in (a, x_2)$$



$$\overset{(***)}{\Longrightarrow} \frac{f(x)-f(u)}{g(x)} < y_1 \frac{g(x)-g(u)}{g(x)}$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < \underbrace{y_1 - y_1 \frac{g(u)}{g(x)} + \frac{f(u)}{g(x)}}_{\to y_1 \ (x \searrow 0)} \quad \forall x \in (0, x_2)$$

$$\overset{(***)}{\Longrightarrow} \exists x_3: \boxed{\frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (0, x_3)} \quad (\Delta\Delta)$$

AUF FOLIE VORGETRAGEN

Zusammengefaßt gilt also in beiden Fällen (i) und (ii) $\forall y_0 > \eta \ \exists x_0$ sodass $[(\Delta), (\Delta\Delta)]$

$$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (0, x_0)} \quad (\Diamond)$$

(2) Analog folgt für $\eta \in \underline{\mathbb{R} \cup \{\infty\}}$: $\forall \tilde{y}_0 < \eta \ \exists \tilde{x}_0$:

$$\boxed{\tilde{y}_0 < \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in (0, \tilde{x}_0)} \quad (\Diamond\Diamond)$$

(3) Aus $(\Diamond)$ & $(\Diamond\Diamond)$ ergibt sich nun die Beh, denn falls $\eta = \pm\infty$ wird durch $(\Diamond)$ bzw $(\Diamond\Diamond)$ alles erledigt. Falls $\eta \in \mathbb{R}$ ergibt die Kombination von $(\Diamond)$ & $(\Diamond\Diamond)$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x}_0$ sodass

$$\eta - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \eta + \varepsilon \ \forall x \in (0, \bar{x}_0) \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to \eta. \qquad \square$$

2.31 BSP (Die Regeln von De l'Hospital)

(i) Wir geben einen alternativen Beweis für [vgl. [2] 3.8 (vii)]

$$\boxed{\frac{\log(x)}{x^\alpha} \to 0 \quad (x \to \infty)}$$

$$f(x) = \log(x) \to \infty \quad (x \to \infty) \qquad f'(x) = 1/x$$
$$g(x) = x^\alpha \to \infty \quad (x \to \infty) \qquad g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\overset{2.30}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

NICHT VORGETRAGEN

(ii) Wir berechnen $\lim\limits_{x\searrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$

Es gilt $\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)}$ und wir versuchen 2.30 anzuwenden. Es ergibt sich

$$f(x) = x - \sin(x) \to 0 \ (x\searrow 0), \quad f'(x) = 1 - \cos(x)$$
$$g(x) = x\sin(x) \to 0 \ (x\searrow 0), \quad g'(x) = \sin(x) + x\cos(x).$$

Nun gilt $f'(x) \to 0 \ (x\searrow 0)$ und $g'(x) \to 0 \ (x\searrow 0)$ und wir versuchen unser Glück mit einer zweiten Anwendung von 2.30 [d.h. angewendet auf f'/g']

$$f''(x) = \sin(x), \quad f''(x) \to 0 \ (x\searrow 0)$$
$$g''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x\sin(x), \quad g''(x) \to 2 \ (x\searrow 0)$$

Also gilt

$$\lim_{x\searrow 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) \overset{\text{2.30, zum Ersten}}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\text{2.30, zum Zweiten}}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0$$

4 INTEGRATION

In diesem Kapitel wenden wir uns der Integralrechnung zu, der zweiten tragenden Säule der Analysis neben der Differentialrechnung.

In §1 entwickeln wir den Integralbegriff für „schöne" Funktionen auf abg. Intervallen. Genauer definieren wir das Riemann-Integral über den Zugang über Treppenfunktionen.

In §2 verknüpfen wir die Integral- mit der Differentialrechnung. Hier lernen wir das Hauptresultat der VO kennen, den Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung, der salopp gesprochen besagt, dass Differenzieren & Integrieren inverse Operationen sind. Dies ermöglicht unter anderem das explizite Berechnen von Integralen.

In §3 lernen wir den Satz von Taylor kennen, der es erlaubt „schöne" Funktionen rein aus der Kenntnis ihrer Ableitungen in einem Punkt zu rekonstruieren.

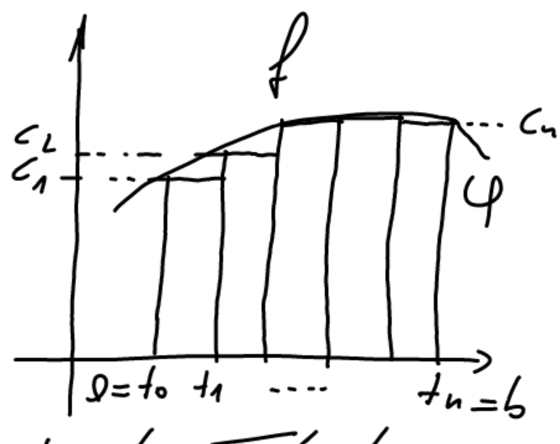
In §4 werden wir uns schließlich mit uneigentlichen Integralen beschäftigen, also mit Integralen auf unbeschränkten Intervallen oder wo der Integrand gegen den Rand des Intervalls unbeschränkt ist.

§1 Das Riemann-Integral

In diesem § entwickeln wir den Integralbegriff. Dabei gehen wir so vor, dass wir zunächst das Integral für eine Klasse einfacher Fkt – die Treppenfkt – definieren. Dazu sind nur elementargeometrische Formeln notwendig (Flächeninhalt von Rechtecken). Das Integral für allgemeinere Funktionen wird dann mittels Approximation durch Treppenfkt definiert.
Wir beginnen mit einer

1.1 Intro (Zwei Wege zum Integralbegriff)

(i) Geometrische Motivation. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine pos. Fkt. Wir wollen den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse bestimmen (Fläche unter dem Graphen).
Falls f „hinreichend flach" ist, dann können wir erwarten, dass die Fläche gut durch Rechtecksflächen approximiert werden kann.



Die Fläche der Rechtecke können wir aber auch als die Fläche unter dem Graphen einer Treppenfkt auffassen (vgl. [2] Def 2.1(x) und Üb. 1.2(ii) unten)

Sei also $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfkt mit

[phi]

$$\varphi(t) = \begin{cases} c_1 & a = t_0 \leq t < t_1 \\ c_2 & t_1 \leq t < t_2 \quad \text{[siehe Skizze]}, \\ \vdots & \\ c_n & t_{n-1} \leq t < t_n = b \end{cases}$$

wobei $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ passend für f gewählt sind. Ein Näherungswert für die Fläche A unter dem Graphen von f ist die Fläche unter dem Graphen von φ — und diese können wir berechnen

$$\boxed{A \approx \sum_{j=1}^{n} \underbrace{c_j}_{\text{Höhe des Rechtecks}} \underbrace{(t_j - t_{j-1})}_{\text{Basis des Rechtecks}} = \sum_{j=1}^{n} \varphi(t_j)(t_j - t_{j-1})}$$

(ii) <u>Motivation aus der Mechanik</u> (vgl. [3] 1.11)

Sei $s : [0,T] \to \mathbb{R}$ die Ortsfunktion eines Massenpunkts P. ($s(t)$ gibt die Position von P zum Zeitpunkt t an.) Dann ist die Momentangeschwindigkeit $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ die Ableitungsfkt von s, also

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Wir stellen uns nun folgende <u>Aufgabe</u>: Angenommen, wir kennen $s(0)$, also den Anfangspunkt von P

und wir kennen $v(t)$ $\forall t \in [0,T]$. Wie können wir $s(t)$ für $0 < t \leq T$ bestimmen?

Betrachten wir dazu ein „kleines" Zeitintervall $[t_1, t_2] \subseteq [0,T]$. Falls sich $v(t)$ auf $[t_1,t_2]$ wenig ändert (also fast konstant ist), dann können wir hoffen, dass folgende Näherung gut ist: Wir bestimmen den „Weggewinn" (Ortszunahme) gemäß der „Formel"

$$\boxed{\text{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit},}$$

also

$$s(t) \approx s(t_1) + v(t_1)(t - t_1) \qquad t \in (t_1, t_2)$$

Wenn wir diese Approximation auf den „kleinen" Zeitintervallen $(a = t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, t_n = T]$ durchführen und die Terme addieren, so erhalten wir die Näherung

$$\boxed{s(T) = s(0) + \sum_{j=1}^{n} v(t_j)(t_j - t_{j-1}).}$$

Bemerkenswert ist, dass wir auch hier die Summe als Fläche unter dem Graphen einer Treppenfkt φ auffassen können, genauer

$$\varphi(t) = v(t_j) \quad \text{für} \quad t \in (t_{j-1}, t_j) \quad (j = 1, \dots, n)$$

(iii) In beiden Fällen haben wir gesehen, dass sich Treppenfunktionen als Grundbausteine einer Integrationstheorie anbieten (geradezu aufdrängen). Daher beginnen wir damit ein Integral für Treppenfkt zu definieren & seine Eigenschaften zu studieren. Zunächst wiederholen wir die (etwas technisch anmutende) Def dieser Klasse (schöner?) Fkt.

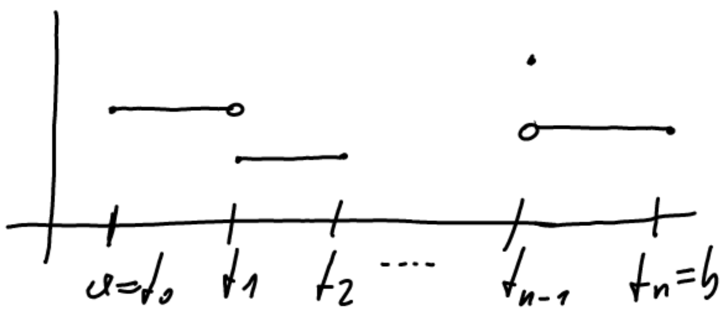
1.2. DEF (Treppenfkt)

(i) Eine Fkt $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfkt, falls es

- eine endliche Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ des Intervalls $[a,b]$ gibt, d.h. $t_i \in [a,b]$ mit
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$
- und Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ sodass

$$\varphi(t) = c_j \quad \text{falls} \quad t \in (t_{j-1}, t_j) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

φ stückweise konst auf den offenen Intervallen; über $\varphi(t_j)$ wird nichts verlangt.



(ii) Wir bezeichnen die Menge der Treppenfkt auf $[a,b]$ mit

$$T[a,b] := \{\varphi: [a,b] \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist Treppenfkt.}\}.$$

1.3 Lemma ($\mathcal{T}[a,b]$ ist ein Vektorraum) Es gilt

(i) $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b] \Longrightarrow \varphi + \psi \in \mathcal{T}[a,b]$

[psi] (ii) $\varphi \in \mathcal{T}[a,b], \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$.

Mit anderen Worten $\mathcal{T}[a,b]$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ($\mathcal{T}[a,b]$ ist ein Teilvektorraum von $\mathbb{R}^{[a,b]} := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ dem VR aller reellen Fkt auf $[a,b]$.) [$\rightsquigarrow$ Lineare Algebra]

Beweis. (ii) ist sofort klar nach Def [$\varphi(t) = c_j$ $t \in (t_{j-1}, t_j)$ $\Longrightarrow (\lambda\varphi)(t) = \lambda\varphi(t) = \lambda c_j$ $t \in (t_{j-1}, t_j)$]

(i) Aus den Zerlegungen $Z = \{t_0, \dots, t_n\}$ für φ und $Z' = \{t'_0, \dots, t'_m\}$ für ψ erhält man die Zerlegung $\tilde{Z} := Z \cup Z'$. Diese kann man als $\tilde{Z} = \{a = s_0, s_1, \dots, s_e = b\}$ schreiben wobei φ und ψ und damit $\varphi + \psi$ auf (s_{j-1}, s_j) konstant ist [Details UE]. $\square$

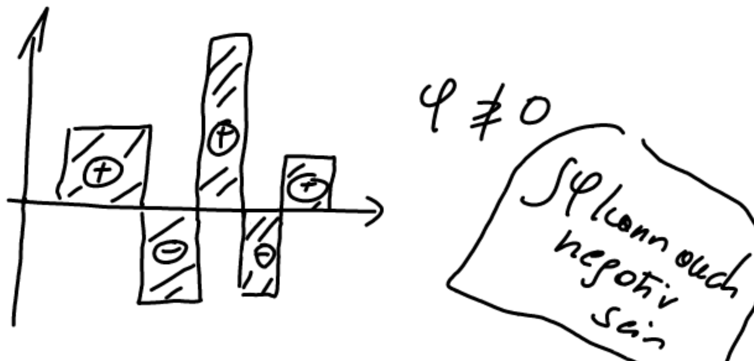
1.4 DEF (Integral für Treppenfkt) Sei $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$ mit Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ und Werten $\varphi(t) = c_j$ ($t \in (t_{j-1}, t_j)$, $1 \leq j \leq n$). Wir definieren das Integral von φ auf $[a,b]$ als

$$\boxed{\int_a^b \varphi(t)\,dt := \sum_{j=1}^{n} c_j (t_j - t_{j-1})}$$

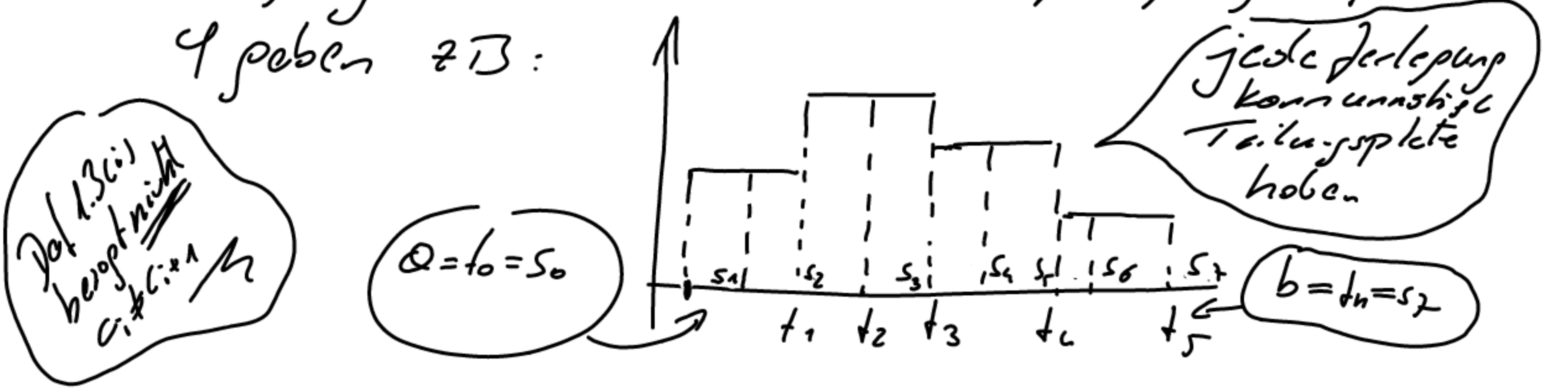
Wir schreiben oft auch $\int \varphi$ statt $\int_a^b \varphi(t)dt$

1.5 Bem (Zum Integral 1.4)

(i) Nochmals geometrische Deutung: Wie in 1.1(i) diskutiert, ist für φ positiv $\int\varphi$ gerade die Fläche unter dem Graphen. Hat φ negative Werte, so werden gemäß Def 1.4 die entsprechenden Rechtecksflächen subtrahiert ($c_j < 0$!)



(ii) Wohldefiniertheit. Strenggenommen, müssen wir noch zeigen, dass das Integral in 1.4. wohldefiniert ist. Genauer: Def 1.2(i) verlangt für $\varphi \in T[a,b]$ die Existenz einer endl. Zerlegung – es könnte aber mehrere Zerlegungen für φ geben zB:



Def 1.4 bezieht sich aber auf eine bestimmte Zerlegung und es ist zu zeigen, dass $\int\varphi$ nicht von der Wahl einer bestimmten Zerlegung abhängt.

Das ist graphisch evident, allerdings etwas auf-

wendig genau hinzuschreiben [siehe [Hö] Lemma in P.2, [F] Bem p.18]].
[Der springende Punkt ist, dass die „unnötigen" Teilungspunkte keinen Schaden anrichten – aber Arbeit machen.]

(iii) Die Wohldefiniertheit des Integrals 1.4 erlaubt es uns das Integral als Abbildung aufzufassen

$$\begin{aligned} \int : T[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \int_a^b \varphi(t)\,dt. \end{aligned}$$

Dieser Standpunkt erlaubt es, bestimmte Eigenschaften des Integrals strukturell besser zu formulieren und zu verstehen. ZB besagt die nächste Prop, dass $\int$ ein

lineares Funktional [im Sinne der lin. Algebra] auf dem VR $T[a,b]$ ist, das zusätzlich monoton ist.

für Abb von VR in den Grundkörper

1.6 Prop (Linearität & Monotonie des $\int$ auf $T[a,b]$)

Seien $\varphi, \psi \in T[a,b]$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

(i) $\displaystyle\int_a^b (\varphi+\psi)(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt + \int_a^b \psi(t)\,dt$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (\lambda\varphi)(t)\,dt = \lambda \int_a^b \varphi(t)\,dt$

(iii) $\underbrace{\varphi \le \psi}_{\varphi(x)\le\psi(x)\ \forall x\in[a,b]} \implies \displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt \le \int_a^b \psi(t)\,dt$

<u>Beweis.</u> (i) Verwende für φ, ψ eine gemeinsame Zerlegung wie im Beweis von Lemma 1.3. Die gewünschten Eigenschaften folgen dann sofort aus korrespondierenden Eigenschaften für endliche Summen [Detail ev. ÜE]. □

(ii), (iii) klar.

1.7 MOTIVATION (Das Riemann-Integral)

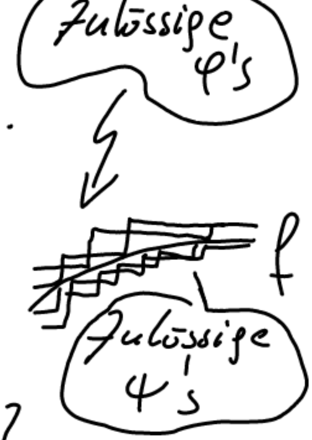
(i) Wir haben also einen <u>vernünftigen</u> Integralbegriff für besonders schöne Fkt, die Treppenfunktionen definiert.

d.h. mit <u>guten</u> Eigenschaften also als lin. mon. Funktional

Unser nächstes Ziel ist es, diesen Integralbegriff unter Beibehaltung dieser vernünftigen Eigenschaften auf eine größere Klasse von Fkt auszudehnen.

(ii) Die Grundidee ist dabei die folgende: Gegeben eine <u>beschränkte</u> Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, dann betrachten wir alle Treppenfkt $\varphi\in\mathcal{T}[a,b]$ mit $f\leq\varphi$ und das inf der Integrale über alle solchen φ, also

$$\alpha := \inf\left\{\int_a^b \varphi(t)\,dt \;\middle|\; \varphi\in\mathcal{T}[a,b],\ f\leq\varphi\right\}.$$



Ebenso können wir alle $\psi\in\mathcal{T}[a,b]$ mit $\psi\leq f$ und ihre Integrale betrachten und setzen

$$\beta := \sup\left\{\int_a^b \psi(t)\,dt \;\middle|\; \psi\in\mathcal{T}[a,b],\ \psi\leq f\right\}$$

Falls diese beiden Zahlen übereinstimmen [i.a. gilt $\beta\leq\alpha$], dann werden wir $\int_a^b f(t)\,dt = \alpha = \beta$ definieren.