zwei wichtige „Integrationsmethoden" kennen: die partielle Integration und die Substitutionsregel. Sie sind die „Umkehrungen" der Produktregel bzw der Kettenregel der Differentialrechnung und können dementsprechend leicht aus der entsprechenden Regel und dem HsDI hergeleitet werden.

2.13 PROP (Partielle Integration) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = \big(f(x)g(x)\big)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Beweis. Wir setzen $F = fg$. Dann gilt $F' = f'g + fg'$ [[3] 1.5(ii)] und daher wegen 2.7(ii)

$$\big(f(x)g(x)\big)\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = \int_a^b F'(t)\,dt = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

$\square$

2.14 BSP (Partielle Integration)

(i) $$\int \underbrace{\sin(x)}_{f'}\underbrace{\cos(x)}_{g}\,dx = -\cos^2(x) - \int \cos(x)\sin(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \sin(x)\cos(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$$

(ii) $$\int \log(x)\,dx \overset{\text{TRICK}}{=} \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{\log(x)}_{g}\,dx = x\log(x) - \int x\cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\log(x) - x$$

2.15 PROP (Substitutionsregel) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar mit $\varphi([a,b]) \subseteq I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

damit ist $f \circ \varphi$ definiert

2.16 BEM (Zur Substitutionsregel)

(i) Prop 2.15 merkt man sich am einfachsten mit folgendem Trick: Betrachte $x = \varphi(t)$ als „neue Variable" für f, also $f(x) = f(\varphi(t))$. Dann gibt die folgende „formale" Rechnung die richtige Transformation

die auftretenden Symbole sind strenggenommen nicht definiert

$$(*) \qquad dx = \frac{dx}{dt}\,dt = \frac{d\varphi(t)}{dt}\,dt = \varphi'(t)\,dt.$$

Schließlich müssen noch die Integralgrenzen „mittransformiert" werden, d.h.: $a \mapsto \varphi(a)$, $b \mapsto \varphi(b)$.

So erhalten wir tatsächlich

$$\int_a^b \underbrace{f(\varphi(t))}_{=f(x)} \underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{\overset{(*)}{=} dx} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

(ii) Die Formel in 2.15 kann in beide Richtungen verwendet werden:

- von rechts nach links, falls wir einen komplizierten Integranden $f(x)$ vorliegen haben und wir ein passendes φ finden können, sodass $(f \circ \varphi)\varphi'$ leicht zu integrieren ist.

- von links nach rechts: Ein zunächst häßlicher Integrand kann die Struktur $(f\circ\varphi)\varphi'$ haben (für passendes φ) und f kann leicht integrierbar sein.

2.17 Bsp (zur Substitutionsmethode)

(i) $$\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(-1-1) = \underline{\underline{1}}$$

$\left[\begin{array}{l} x=\varphi(t)=2t \\ dx/dt = 2 \end{array}\right]$

[von links nach rechts]

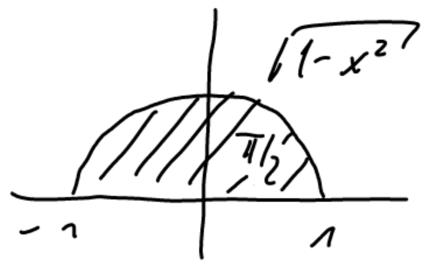
(ii) Etwas allgemeiner sei $c\neq 0$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig, $a<b\in\mathbb{R}$

$$\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_a^b f(ct)\,c\,dt = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)\,dx$$

der besseren Sichtbarkeit wegen

$\left[\begin{array}{l} \text{von links nach rechts} \\ x=\varphi(t)=ct \\ dx/dt=c \end{array}\right]$

(iii) Die Fläche des Halbkreises:



$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)\cos(t)\,dt$$

Idee: Verwende $\cos(t)=\sqrt{1-\sin^2(t)}$ von rechts nach links

daher:

$\left[\begin{array}{l} x=\varphi(t)=\sin(t) \\ dx/dt = \cos(t) \\ -1\le x=\sin(t)\le 1 \\ \arcsin(-1)\le\arcsin(x)=t\le\arcsin(1) \\ \quad = -\pi/2 \qquad\qquad\qquad = \pi/2 \end{array}\right]$

[2] 3.28(ii)

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(2t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1\,dt$$

$\cos(2t)=2\cos^2(t)-1$ [[2] 3.17(ii)]

$\underset{\text{c(ii), c=2}}{=} \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t)\,dt + \frac{1}{2}t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4}\sin(t)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$= 1/4\Big(\underbrace{\sin(\pi)}_{0} - \underbrace{\sin(-\pi)}_{0}\Big) + \frac{1}{2}\left(\pi/2 + \pi/2\right) = \underline{\underline{\pi/2}}$

NICHT VORGETRAGEN

Beweis von 2.15: Sei F eine Stammfkt von f.

$\Longrightarrow F\circ\varphi : [a,b]\to\mathbb{R}$ ist diff'bar

$\overset{[3]\,1.23}{\Longrightarrow} (F\circ\varphi)' = F'\circ\varphi\cdot\varphi' = f\circ\varphi\cdot\varphi'$

$\overset{2.7\,(ii)}{\Longrightarrow} \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (F\circ\varphi)\Big|_a^b$

$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$ $\square$

§4 Uneigentliche Integrale

4.1 Intro: Der bisher entwickelte Integralbegriff ist für viele Anwendungen zu eng gefaßt. Seine beiden „Schönheitsfehler" sind:

- Wir haben nur über kompakte Intervalle integriert.
- R-intbare Fkt sind notwendigerweise beschränkt.

Um Funktionen auch über unbeschränkte Intervalle zu integrieren und unbeschränkte Funktionen zu integrieren lernen wir nun die sog. uneigentlichen Integrale kennen. Diese werden wir unter geeigneten Bedingungen als Grenzwerte von Riemann-Integralen definieren. Wir betrachten 3 Fälle.

4.2 DEF (Uneig. $\int$, Fall 1: Eine unendliche Intervallgrenze)
Sei $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ eine Fkt mit der Eigenschaft

$$f \text{ ist R-intbar auf jedem Intervall } [a,R] \text{ mit } a<R<\infty.$$

Falls $\lim\limits_{R\to\infty}\int_a^R f(t)\,dt$ existiert und endlich ist, so heißt das Integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergent $\left[\int_a^\infty f<\infty\right]$ und wir setzen

Limes der Fkt $R\mapsto\int_a^R f$

$$\boxed{\int_a^\infty f(t)\,dt=\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(t)\,dt}$$

Analog für $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$.

4.3 BSP (Uneig $\int$, Fall 1)

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$ für $s>1$.

Tatsächlich gilt $1/x^s$ ist stetig und daher R-int'bar auf jedem Intervall $[1,R]$ und

$$\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}\cdot\frac{1}{x^{s-1}}\Big|_1^R = \frac{1}{s-1}\Big(1-\underbrace{\frac{1}{R^{s-1}}}_{\to 0 \text{ da } s>1}\Big) \quad (*)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{s-1} \quad (R\to\infty)$$

(ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ divergiert für $s\le 1$, denn

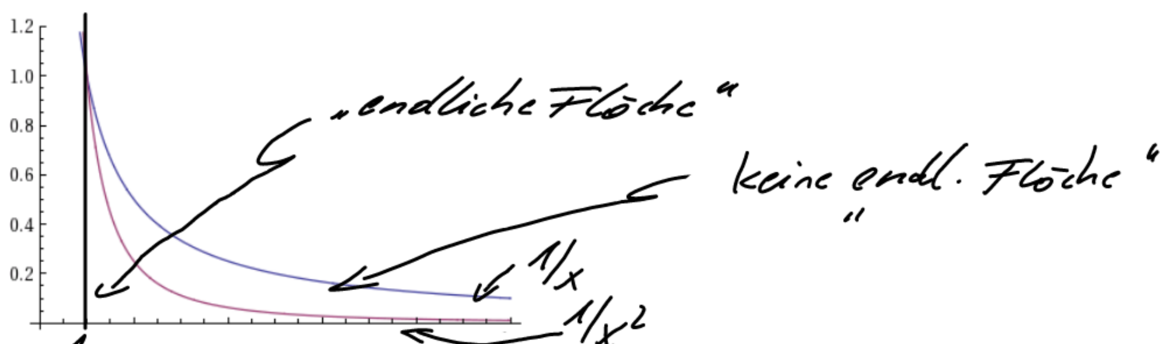
für $s\neq 1$ können wir die Rechnung in (*) verwenden und sehen $\displaystyle\frac{1}{s-1}\Big(1-\frac{1}{R^{s-1}}\Big)\longrightarrow\infty$.

Für $s=1$ gilt [[13] 3.8(iv)]

$$\int_1^R \frac{dx}{x} = \log(x)\Big|_1^R = \log(R)\to\infty \quad (R\to\infty).$$

(iii) Insgesamt gilt also

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ konvergiert} \iff s>1}$$



4.4 DEF (Uneig. $\int$, Fall 2: Integrand an einer Integrationsgrenze unbeschr./undefiniert)

Sei $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit d. Eigenschaft

f ist R-intbar auf jedem Intervall $[a+\varepsilon, b]$ $(\varepsilon>0)$

Falls $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt$ existiert und endl. ist, so heißt das Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ konvergent $\left[\int_a^b f<\infty\right]$ und wir setzen

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt}$$

Analog für $f:[a,b)\to\mathbb{R}$.

4.5 BSP (Uneig. Integral, Fall 2)

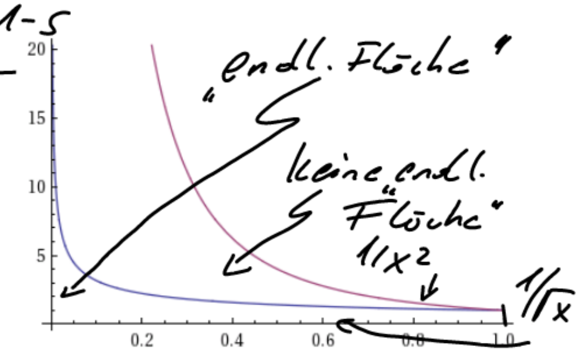
Es gilt $\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^s} \text{ konvergiert } \iff s<1.}$

$\left[1/x^s \text{ ist undefiniert in } x=0 \text{ falls } s>0\right]$

Tatsächlich gilt für $s\neq 1$ und $1>\varepsilon>0$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s}=\frac{1}{1-s}\,x^{1-s}\Big|_\varepsilon^1=\frac{1-\varepsilon^{1-s}}{1-s}$$

$$\xrightarrow{(\varepsilon\to 0)}\begin{cases}\frac{1}{1-s} & s<1\\ \infty & s>1\end{cases}$$



Falls $s=1$ und $1>\varepsilon>0$, dann gilt

$$\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\log(x)\Big|_\varepsilon^1=-\log(\varepsilon)\xrightarrow{[3]\,3.8(ii)}\infty\ (\varepsilon\to 0)$$

4.6 DEF (Uneig-$\int$, Fall 3: kombinierter Fall – beide Integrationsgrenzen kritisch)

Sei $-\infty \le a < b \le \infty$ und $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine Fkt m.d. Eig

f $\mathcal{R}$-int.bar auf jedem Intervall $[\alpha,\beta]$ mit $a<\alpha<\beta<b$.

Falls für ein beliebiges $c\in(a,b)$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(t)\,dt$ und $\int_c^b f(t)\,dt$ konvergieren, so heißt das Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ konvergent $\left[\int_a^b f<\infty\right]$ und wir setzen

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^c f(t)\,dt+\int_c^b f(t)\,dt.$$

Diese Def ist unabhängig von der Wahl von c – ohne Beweis

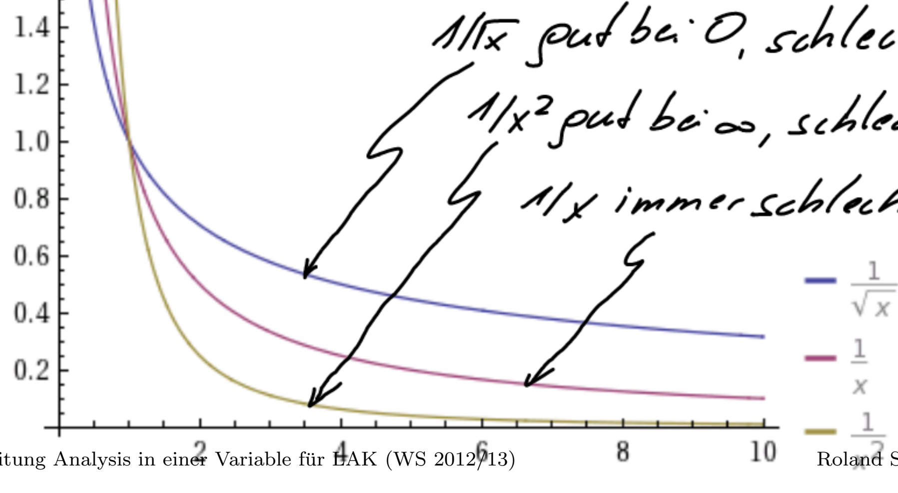
4.7 Bsp (Uneig. Int., Fall 3)

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^s}$ divergiert $\forall s\in\mathbb{R}$

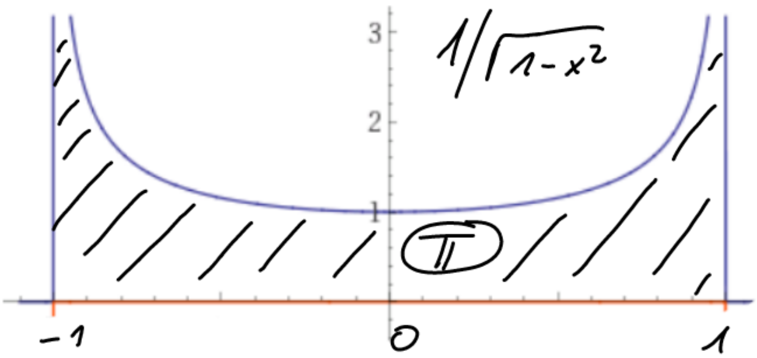
Tatsächlich setze $c=1$, dann gilt

$4.3 \Rightarrow \int_1^\infty 1/x^s\,dx$ div $\forall s\le 1$

$4.5 \Rightarrow \int_0^1 1/x^s\,dx$ div $\forall s\ge 1$



(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$

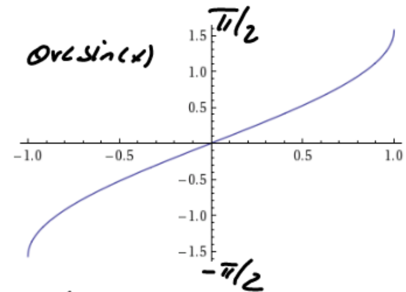


denn es gilt

$\boxed{3}$ 1.28(iii)

$$\int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin(-1+\varepsilon)$$

$$\to -\arcsin(-1) = \pi/2 \quad (\varepsilon \to 0)$$



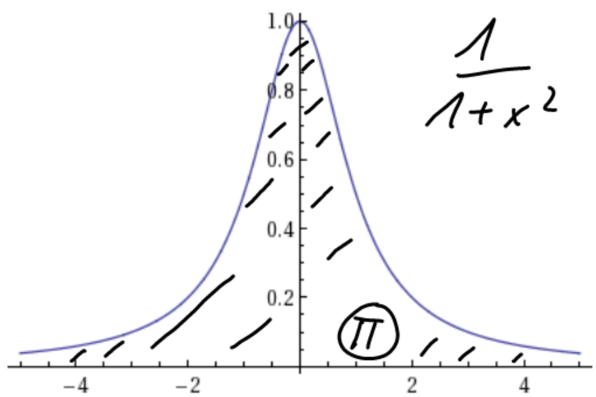
$$\int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\varepsilon)$$

$$\to \arcsin(1) = \pi/2 \quad (\varepsilon \to 0)$$

Daher gilt $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi/2 + \pi/2 = \pi$

NICHT VORGETRAGEN

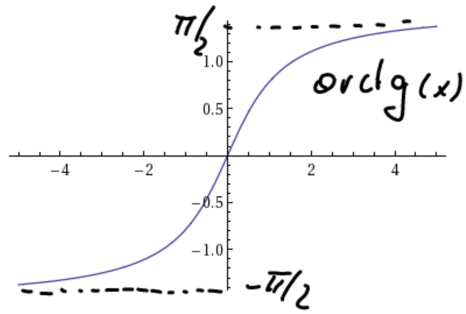
(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$



Sei $R>0$, dann gilt

$\boxed{3}$ 1.28(iv)

$$\int_{-R}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = -\arctan(-R) \to \pi/2 \quad (R \to \infty)$$



$$\int_{0}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(R) \to \pi/2 \quad (R \to \infty)$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2 + \pi/2 = \pi$$

4.8 MOTIVATION (Konvergenztests für uneig. Int.)

Ganz ähnlich zu den Konvergenztests für Reihen [2] §5 lassen sich Konvergenztests für uneig. Integrale formulieren, die es einem ersparen, die oft umständlichen Integrale, die in den Defs gefragt sind zu berechnen.

Wir formulieren die Tests nur für den Fall 1. Eine Anpassung an die Fälle 2 & 3 ist reine Routinearbeit, die wir hier unterlassen.

4.9 PROP (Konvergenztests f. uneig. Int.)

Sei $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ wie in Def 4.2, d.h. f R-intbar für jedes Intervall $[a,R]$ mit $a<R<\infty$. Dann gilt:

(i) Cauchy-Prinzip:

$$\int_a^\infty f(t)\,dt \text{ konvergiert} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists R>a: \forall r,s>R \quad \left|\int_r^s f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

(ii) Majorantenkriterium: Sei $h: [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $h \geq 0$ und $\int_a^\infty h(t)\,dt$ konvergent. Falls

$$|f(x)| \leq h(x) \ \forall x>a \implies \int_a^\infty f(t)\,dt \text{ konvergiert}$$

(iii) Minorantenkrit.: Sei $g: [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $g \geq 0$ und $\int_a^\infty g(t)\,dt$ divergent. Falls

$$f(x) \geq g(x) \ \forall x>a \implies \int_a^\infty f(t)\,dt \text{ divergiert.}$$

Beweis. (i) „$\Leftarrow$": Sei (R_n) eine Folge mit $R_n \to \infty$ $(n\to\infty)$
Sei $\varepsilon>0$ und wähle $R>0$ wie in der Bedingung.

$$\Longrightarrow \exists N\in\mathbb{N}: R_n > R \quad \forall n\geq N$$

$$a_n = \int_0^{R_n} f$$
$$|a_n - a_m| = \left|\int_0^{R_n} f - \int_0^{R_m} f\right| = \left|\int_{R_m}^{R_n} f\right|$$

$$\overset{\text{Voraus.}}{\Longrightarrow} \left|\int_{R_m}^{R_n} f(x)\,dx\right| < \varepsilon \quad \forall n\geq m\geq N$$

$$\overset{[1]\,3.16}{\Longrightarrow} \left(\int_0^{R_n} f(t)\,dt\right)_n \text{ ist eine Cauchy-Folge}$$

$$\overset{[1]\,3.18}{\Longrightarrow} \left(\int_0^{R_n} f(t)\,dt\right)_n \text{ konvergiert } \overset{[3]\,1.4}{\Longrightarrow} \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(t)\,dt\ \exists$$

(i) „$\Rightarrow$": Indirekt angenommen $\int_0^\infty f(t)\,dt$ konvergiert, aber die Bedingung auf der rechten Seite ist verletzt, d.h.

$$\exists\varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists r_n, s_n > n: \left|\int_{r_n}^{s_n} f(t)\,dt\right| \geq \varepsilon \qquad (*)$$

Nun gilt aber $r_n \to \infty$, $s_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ und wir definieren eine neue Folge R_n durch Mischung von r_n & s_n, d.h.

$$\left.\begin{aligned} R_{2k} &= r_k \\ R_{2k+1} &= s_k \end{aligned}\right. \quad (k\in\mathbb{N}).$$

Dann gilt $R_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ und weil $\int_0^\infty f(t)\,dt$ konv.

$$\overset{[3]\,1.4}{\Longrightarrow} \left(\int_0^{R_m} f(t)\,dt\right)_m \text{ konvergiert}$$

$$\overset{[1]\,3.18}{\Longrightarrow} \left(\int_0^{R_m} f(t)\,dt\right)_m \text{ ist Cauchy-Folge}$$

$$\Longrightarrow \text{↯ zu } (*)$$

(ii) Folgt aus (i): Sei $\varepsilon > 0$ und R wie in (i) für h und $r,s > R$.
Dann gilt:

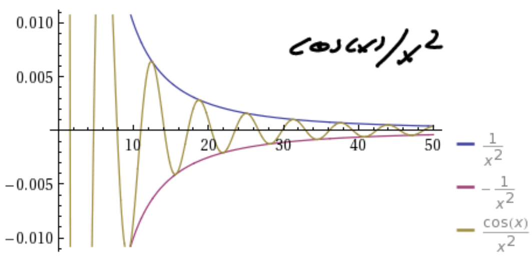
$$\left|\int_r^s f(t)\,dt\right| \underset{\Delta\text{-Ugl}}{\le} \int_r^s |f(t)|\,dt \overset{1.15)}{\le} \int_r^s h(t)\,dt < \varepsilon$$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow} \int_a^\infty f < \infty$ (i) für $h \Rightarrow$ (i) für f

(iii) Folgt sofort aus (ii): Indir. ang. $\int_a^\infty f < \infty$
$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \int_a^\infty g < \infty$ ↯ zur Voraussetzung. $\square$

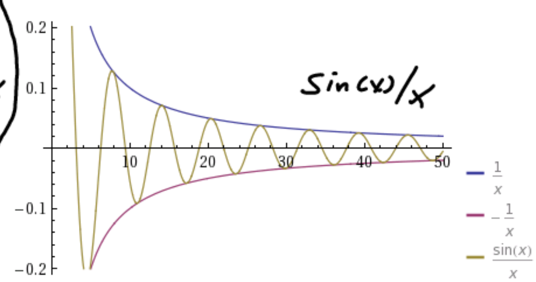
4.10 Bsp (Konvergenztests)

(i) $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$ konvergiert wegen 4.8(ii): (4.3(ii))



$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le 1/x^2$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konv

Majoranten-krit. funktioniert hier nicht so wie oben?



(ii) $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ konvergiert

Wir wenden das Cauchy-Prinzip an: Seien $1 < r < s$ dann gilt

$$\left|\int_r^s \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \overset{P.I.}{=} \left|-\frac{\cos(x)}{x}\Big|_r^s - \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\right|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\le} \left|\frac{\cos(r)}{r} - \frac{\cos(s)}{s}\right| + \left|\int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\right|$$

$$\le \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) + \int_r^s \frac{dx}{x^2}$$

und dieser Ausdruck wird beliebig klein für r,s groß $\left[\frac{1}{r}, \frac{1}{s} \to 0\right.$ und $\left|\int_r^s 1/x^2\right| < \varepsilon$ lt. Cauchy-Prinzip $\left.\right]$

Bemerke: Wir sind hier hart an der Grenze des Möglichen, denn $\int_1^\infty dx/x$ divergiert und auch $\int_0^\infty |\sin(x)|/x\,dx$.

4.11 MOTIVATION (Integraltest für Reihen)

Die Analogie zwischen Konvergenztests für uneig. Int. und Reihen erlaubt eine Verbindung zwischen den beiden herzustellen, den sog. Integraltest f. Reihen (der die anderen Tests aus [2] §4 ergänzt)

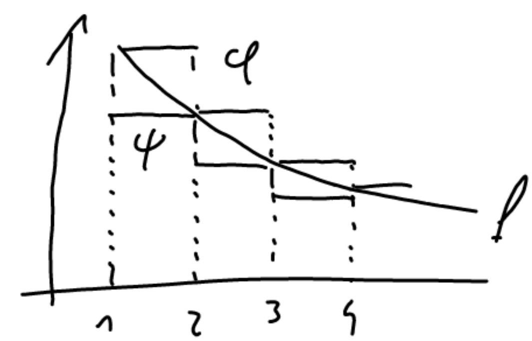
4.12 PROP (Integraltest für Reihen)

Sei $f: [1,\infty) \to [0,\infty)$ eine mon. fallende Fkt. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert } \iff \int_1^{\infty} f(t)\,dt \text{ konvergiert}$$

Beweis. Wir definieren Treppenfkt $\varphi, \psi : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &:= f(n) \\ \psi(x) &:= f(n+1) \end{aligned}\right\} (n \le x < n+1)$$



f mon. fallend $\Longrightarrow \psi \le f \le \varphi$

Integration über $[1,N]$ liefert

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) = \int_1^N \varphi(t)\,dt \overset{1.15}{\le} \int_1^N f(t)\,dt \overset{1.15}{\le} \int_1^N \psi(t)\,dt = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Daher

$\int_1^\infty f < \infty \Rightarrow S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n)$ beschränkt $\overset{[1]4.6}{\Longrightarrow} \sum_{n=2}^{\infty} f(n) < \infty$ & umgekehrt

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \Longrightarrow \forall$ mon. wachs. Folgen R_n mit $R_n \to \infty \ (n \to \infty)$ gilt

$\left(\int_1^{R_n} f(t)\,dt\right)_n$ mon. wachs. & beschr $\overset{[1]3.25}{\Rightarrow}$ konv $\Rightarrow \int_1^\infty f < \infty$ $\square$

NUR BEWEISIDEE VORGETRAGEN

4.13 BSP ($\sum \frac{1}{n^s}$ zum Zweiten; vgl [1] 4.8) Für $s > 0$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konv} \overset{4.12}{\iff} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \text{ konv} \overset{4.3(iii)}{\iff} s > 1$$