Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	$\sum$/40

Note:

Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13

2. Prüfungstermin (1.3.2013)

Gruppe A

1. *Definitionen, Sätze & Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe: (je 1 Punkt)
   Stammfunktion, uneigentlich integrierbare Funktion auf $[a, \infty)$, Integral einer Treppenfunktion
   (b) Formuliere die folgenden Resultate (je 2 Punkte): Mittelwertsatz der Integralrechnung, Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion
   (c) Formuliere und beweise die Kettenregel. Zusätzlich beschreibe in Worten kurz Idee und Verlauf des Beweises. (7 Punkte)

2. *Grundideen.*
   (a) Erkläre anschaulich anhand einer Skizze, warum die erste Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, also
   $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$
   stimmt bzw. plausibel ist. (2 Punkte)
   (b) Erkläre anschaulich und anhand einer Skizze die Aussage des Mittelwertsatzes der Integralrechnung im vereinfachten Fall ($\varphi = 1$). (2 Punkte)
   (c) Formuliere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und erkläre seine Aussage anschaulich anhand einer Skizze. (2 Punkte)

3. *Anwendungen der Differentialrechnung.*
   (a) *Extrema.* Formuliere und beweise eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums einer ausreichend differenzierbaren (genaue Formulierung gefragt!) Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. (4 Punkte)
   (b) *Monotonie.* Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Zeige:
   $$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ monoton wachsend auf } [a, b].$$
   Gilt auch die Umkehrung? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
   (4 Punkte)

Bitte umblättern!

4. *Beispiele und Gegenbeispiele.*
   (a) Gib eine (auf einem geeigneten Intervall definierte) Funktion an, die unbeschränkt aber uneigentlich integrierbar ist. (1 Punkt)
   (b) Berechne $\displaystyle\int_0^1 x\, e^x dx$. (1 Punkt)
   (c) Berechne $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2x)\, dx$. (2 Punkte)
   (d) Diskutiere im Detail ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion, die nicht stetig differenzierbar ist. (2 Punkte)

5. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (Je 2 Punkte)
   (a) Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die auf $(a, b]$ differenzierbar ist, ist schon auf $[a, b]$ differenzierbar.
   (b) Eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr globales Minimum am Rand an.
   (c) Jede Treppenfunktion ist Riemann-integrierbar.

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	$\sum$/40

Note:

Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13

2. Prüfungstermin (1.3.2013)

Gruppe B

1. *Grundideen.*
   (a) Formuliere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und erkläre seine Aussage anschaulich anhand einer Skizze. (2 Punkte)
   (b) Erkläre anschaulich anhand einer Skizze, warum die erste Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, also
   $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$
   stimmt bzw. plausibel ist. (2 Punkte)
   (c) Erkläre anschaulich und anhand einer Skizze die Aussage des Mittelwertsatzes der Integralrechnung im vereinfachten Fall ($\varphi = 1$). (2 Punkte)

2. *Definitionen, Sätze & Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe: (je 1 Punkt)
   striktes lokales Maximum, uneigentlich integrierbare Funktion auf $(a, b]$, Integral einer Treppenfunktion
   (b) Formuliere und beweise die Kettenregel. Zusätzlich beschreibe in Worten kurz Idee und Verlauf des Beweises. (7 Punkte)
   (c) Formuliere die folgenden Resultate (je 2 Punkte): Mittelwertsatz der Integralrechnung, Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

3. *Anwendungen der Differentialrechnung.*
   (a) *Monotonie.* Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Zeige:
   $$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ streng monoton wachsend auf } [a, b].$$
   Gilt auch die Umkehrung? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
   (4 Punkte)
   (b) *Extrema.* Formuliere und beweise eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums einer ausreichend differenzierbaren (genaue Formulierung gefragt!) Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. (4 Punkte)

Bitte umblättern!

4. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (Je 2 Punkte)

   (a) Eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr globales Maximum am Rand an.

   (b) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die auf $(a, b]$ differenzierbar ist, ist schon auf $[a, b)$ stetig.

   (c) Jede auf $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktion ist auf $[a, b]$ auch beschränkt.

5. *Beispiele und Gegenbeispiele.*

   (a) Gib eine auf einem Intervall der Form $[a, \infty)$ definierte beschränkte Funktion an, die nicht uneigentlich integrierbar ist. (1 Punkt)

   (b) Diskutiere im Detail ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion, die nicht stetig differenzierbar ist. (2 Punkte)

   (c) Berechne $\displaystyle\int_0^1 e^x \, x \, dx$. (1 Punkt)

   (d) Berechne $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{1}{2}\, x\right) dx$. (2 Punkte)