Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	$\sum$/40

Note:

Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13

3. Prüfungstermin (19.4.2013)

Gruppe A

1. *Definitionen, Sätze & Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe: (3 Punkte)
   Differenzenquotient, Lipschitz-stetige Funktion, (nicht-striktes) lokales Maximum

   (b) Formuliere den Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion.
   Diskutiere die folgenden beiden Punkte: Warum existiert die Umkehrfunktion? Ist das Nichtverschwinden der Ableitung der Funktion selbst notwendig?
   Skizziere den Beweisgang kurz in Worten und führe dann den Beweis aus.
   (7 Punkte)

   (c) Skizziere den Beweisgang für die Aussage:

   Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integriebar auf $[a, b]$.

   Insbesondere formuliere die auf dem Weg benötigten Resultate genau aus.
   (5 Punkte)

2. *Grundideen.*
   (a) Erkläre anhand einer Skizze oder einer anschaulichen Rechnung, warum die erste Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, also

   $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

   stimmt bzw. plausibel ist. (2 Punkte)

   (b) Bekanntlich (Vo. $\boxed{3}$ Thm. 1.19) ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann in $\xi \in I$ differenzierbar, falls

   $$f(\xi + h) - f(\xi) = a\,h + r(h),$$

   wobei $a \in \mathbb{R}$ eine fixe Zahl und r eine reelle Funktion mit $r(h)/h \to 0$ für $h \to 0$ ist. In diesem Falle ist $a = f'(\xi)$.
   Diskutiere die Bedeutung dieser Aussage, fertige eine Skizze an und gehe insbesondere auf das Verhalten des „Fehlers", d.h. $r(h)/h \to 0$ ein. (4 Punkte)

Bitte umblättern!

3. *Vermischtes.*

   (a) Zeige unter Verwendung der Tatsache $\log'(1) = 1$, dass (2 Punkte)

   $$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

   (b) Formuliere und beweise die Produktregel. (3 Punkte)

   (c) Berechne $(x^\alpha)'$ ($x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$) und gib in jedem Schritt an, welche Resultate/Rechenregeln du verwendest. (2 Punkte)

4. *Beispiele und Gegenbeispiele.*

   (a) Gib – falls existent – jeweils eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften an (je 1 Punkt): integrierbar aber nicht stetig, streng monoton fallend aber $f'(x) = 0$ für mindestens ein x.

   (b) Berechne $\int x^3 \log(x)\, dx$. (2 Punkte)

   (c) Berechne: (je 1 Punkt)

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log(x)} \quad (\alpha > 0), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)}$$

5. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (je 2 Punkte)

   (a) Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.

   (b) Die Menge $\mathcal{T}[a, b]$ der Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ bildet einen Vektorraum.

   (c) Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ existiert.

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	$\sum$ /40

Note:

Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13

3. Prüfungstermin (19.4.2013)

Gruppe B

1. *Grundideen.*
   (a) Bekanntlich (Vo. $\boxed{3}$ Thm. 1.19) ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann in $\xi \in I$ differenzierbar, falls
   $$f(\xi + h) - f(\xi) = a\, h + r(h),$$
   wobei $a \in \mathbb{R}$ eine fixe Zahl und r eine reelle Funktion mit $r(h)/h \to 0$ für $h \to 0$ ist. In diesem Falle ist $a = f'(\xi)$.
   Diskutiere die Bedeutung dieser Aussage, fertige eine Skizze an und gehe insbesondere auf das Verhalten des „Fehlers", d.h. $r(h)/h \to 0$ ein. (4 Punkte)
   (b) Erkläre anhand einer Skizze oder einer anschaulichen Rechnung, warum die erste Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, also
   $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) \;=\; f(x)$$
   stimmt bzw. plausibel ist. (2 Punkte)

2. *Definitionen, Sätze & Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe: (3 Punkte)
   Lipschitz-stetige Funktion, Differenzenquotient, (nicht-striktes) lokales Minimum
   (b) Skizziere den Beweisgang für die Aussage:
   Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integriebar auf $[a, b]$.
   Insbesondere formuliere die auf dem Weg benötigten Resultate genau aus. (5 Punkte)
   (c) Formuliere den Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion.
   Diskutiere die folgenden beiden Punkte: Warum existiert die Umkehrfunktion?
   Ist das Nichtverschwinden der Ableitung der Funktion selbst notwendig?
   Skizziere den Beweisgang kurz in Worten und führe dann den Beweis aus.
   (7 Punkte)

Bitte umblättern!

3. *Beispiele und Gegenbeispiele.*
   (a) Berechne $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$). (je 1 Punkt)
   (b) Berechne (2 Punkte)
   $$\int x^3 \log(x)\, dx.$$
   (c) Gib – falls existent – jeweils eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften an (je 1 Punkt):
   streng monoton fallend aber $f'(x) = 0$ für mindestens ein x,
   integrierbar aber nicht stetig.

4. *Vermischtes.*
   (a) Formuliere und beweise die Produktregel. (3 Punkte)
   (b) Berechne $(x^\alpha)'$ ($x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$) und gib in jedem Schritt an, welche Resultate/Rechenregeln du verwendest. (2 Punkte)
   (c) Zeige unter Verwendung der Tatsache $\log'(1) = 1$, dass (2 Punkte)
   $$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

5. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (je 2 Punkte)
   (a) Das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$ existiert.
   (b) Die Menge $\mathcal{T}[a, b]$ der Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ bildet einen Vektorraum.
   (c) Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.