Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	$\sum$/40

Note:

Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13

5. Prüfungstermin (20.9.2013)

Gruppe A

1. *Definitionen, Sätze, Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe und fertige jeweils eine instruktive Skizze an: (je 1 Punkt) lokales Maximum/Minimum, Wendestelle, f^+
   (b) Formuliere und beweise den Satz von der Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion. Begründe jeden deiner Berweisschritte.
   Welche Voraussetzung(en) (über die Voraussetzungen des Satzes über die Stetigkeit der Umkerfunktion und die bloße Differenzierbarkeit der Funktion hinaus) benötigt der Satz? Sind/Ist diese tatsächlich notwendig? (5 Punkte)
   (c) Zeige: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in I$ und es gilt $f(\xi) \neq 0$, dann ist $\frac{1}{f}$ differenzierbar in ξ. Begründe jeden deiner Schritte und gib die Ableitung von $\frac{1}{f}$ an! (2 Punkte)

2. *Beispiele und Gegenbeispiele.*
   (a) Gib eine konvexe und eine konkave Funktion an. (2 Punkte)
   (b) Berechne $\lim_{0\neq x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$. (1 Punkt)
   (c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wo ist die Funktion $g(x) := \sqrt{|f(x)|}$ differenzierbar. Berechne die Ableitung von g. (2 Punkte)
   (d) Gib—falls existent—jeweils explizit eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften an (1+1+2 Punkte): differenzierbar aber nicht integrierbar, unstetig aber integrierbar, stetig differenzierbar aber nicht 2-mal differenzierbar.

Bitte umblättern!

3. *Grundideen.*

   (a) Formuliere den Hauptsatz der Differential und Integralrechnung. Diskutiere die Aussage:

      „Differenzieren und Integrieren sind im Wesentlichen inverse Operationen."

      Gehe insbesodnere auf die Definitions- und Zielbereich des Ableitungs- und Integraloperators ein. Fertige eine entsprechende Skizze an. (4 Punkte)

   (b) Formuliere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Diskutiere seine anschauliche Bedeutung und Plausibilität. Nenne mindestens zwei Anwendungen des Satzes. (4 Punkte)

4. *Vermischtes.*

   (a) *Differenzierbarkeit und Stetigkeit 1.* Zeige, falls $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in I$ ist, dann ist f schon stetig in ξ. (2 Punkte)

   (b) *Differenzierbarkeit und Stetigkeit 2.* Bekanntlich ist die Umkehrung der Aussage in (a) falsch. Diskutiere ein expizites Gegenbeispiel, bei dem zumindest eine der einseitigen Ableitungen nicht exisiert. Was bedeutet es anschaulich für eine Funktion in einem Punkt zwar stetig aber nicht differenzierbar zu sein? (2+1 Punkte)

   (c) *Uneigentliche Integrale.* Diskutiere das Verhalten der uneigentlichen Integrale

   $$\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$$

   für die verschiedenen Werte von $s \in \mathbb{R}$. Fertige eine Skizze an! Was bedeutet die Konvergenz/Divergenz der Integrale anschaulich? (4 Punkte)

5. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (je 2 Punkte)

   (a) Jede stetige Funktion ist (Riemann-)integrierbar.

   (b) Die Regel zur partielle Inetgration kann man als „Umkehrung" der Produktregel sehen.