Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	$\sum$/40

Note:

Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13

6. Prüfungstermin (16.12.2013)

Gruppe A

1. *Definitionen, Sätze, Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe und fertige jeweils eine instruktive Skizze an: (je 1+2 Punkte) konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, uneigentliches Integral $\int_a^b f$ für $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$ („3. Fall").
   (b) Beweise die folgende Aussage und begründe alle Beweisschritte:
   Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls $\xi \in (a, b)$ eine lokale Extremstelle ist, so verschwindet $f'(\xi)$.
   Wie muss die Aussage (um)formuliert werden, falls (a, b) durch ein nicht notwendigerweise offenes Intervall I ersetzt wird. An welcher Stelle im Beweis muss hier aufgepasst werden? (4 Punkte)
   (c) Formuliere und beweise den Mittelwertsatz der *Integral*rechnung (für allgemeines, nicht-negatives φ). Begründe jeden deiner Beweisschritte genau!
   (4 Punkte)

2. *Beispiele und Gegenbeispiele.*
   (a) Berechne (je 2 Punkte): $(x^x)''$, $\int \arctan(x)\,dx$.
   (b) Gib eine Funktion an, die weder konkav noch konvex ist (1 Punkt).
   (c) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Bekannterweise ist f stetig und somit auch gleichmäßig stetig ($[0, 1]$ ist kompakt). Zeige bzw. argumentiere nun (je 1 Punkt):
   - f ist diffenzierbar für alle $x \neq 0$.
   - f ist nicht differenzierbar in $x = 0$.
   - f ist nicht Lipschitz stetig.

Bitte umblättern!

3. *Grundideen.*

   (a) *Differenzierbarkeit.* Bekanntlich (Vo. $\boxed{3}$ Thm. 1.19) ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann in $\xi \in I$ differenzierbar, falls

   $$f(\xi + h) - f(\xi) = a\,h + r(h),$$

   wobei $a \in \mathbb{R}$ eine fixe Zahl und r eine reelle Funktion mit $r(h)/h \to 0$ für $h \to 0$ ist. In diesem Falle ist $a = f'(\xi)$.

   Diskutiere die Bedeutung dieser Aussage, fertige eine Skizze an und gehe insbesondere auf das Verhalten des „Fehlers", d.h. $r(h)/h \to 0$ ein. (4 Punkte)

   (b) *Integral für Treppenfunktionen.* Definiere das Integral für Treppenfunktionen und erläutere die Bedeutung der Aussage: Das Integral ist ein lineares und monotones Funktional auf dem Vektorraum $\mathcal{T}[a, b]$ der Treppenfunktionen auf $[a, b]$. (3 Punkte)

4. *Vermischtes.*

   (a) *Ableitung und Monotonie.* Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Zeige:

   $$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ monoton wachsend auf } [a, b].$$

   Gilt auch die Umkehrung? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. (4 Punkte)

   (b) *Darstellung von e.* Zeige unter Verwendung der Tatsache $\log'(1) = 1$, dass

   $$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

   Begründe alle deine Schritte! (2 Punkte)

   (c) *Arcustangens.* Berechne Extrema und Wendestellen des Arcustangens. Fertige eine Skizze an. (4 Punkte)

5. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (je 2 Punkte)

   (a) Jede differenzierbare Funktion ist auch $\mathcal{C}^1$.

   (b) Für jede konvexe Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt $f(x)'' > 0$ für alle $x \in I$.