Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	$\sum$ /40

Note:

Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13

7. Prüfungstermin (28.2.2014)

Gruppe A

1. *Definitionen, Sätze & Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe:
   (in einem Punkt) differenzierbare Funktion, Stammfunktion, Wendestelle einer Funktion, Riemann-integrierbare Funktion (inkl. Ober- und Unterintegral) (1+1+1+2 Punkte)
   (b) Formuliere die Regel zur partiellen Integration und beweise sie. (3 Punkte)
   (c) Formuliere den Satz von Rolle und beweise ihn.
   Wo und wie wird die Stetigkeit der Funktion verwendet? (6 Punkte)

2. *Grundideen.*
   (a) Erkläre anschaulich anhand einer Skizze, warum die erste Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, also
   $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) \;=\; f(x)$$
   stimmt bzw. plausibel ist. (2 Punkte)
   (b) Erkläre anschaulich und anhand einer Skizze die Aussage des Mittelwertsatzes der Integralrechnung im vereinfachten Fall ($\varphi = 1$). (2 Punkte)
   (c) Diskutiere, was es anschaulich für eine Funktion bedeutet, an einer Stelle *nicht* differenzierbar zu sein. (2 Punkte)

3. *Beispiele und Gegenbeispiele.*
   (a) Berechne die Ableitung der Arcuscosinus-Funktion. Begründe jeden deiner Schritte. (2 Punkte)
   (b) Gib je ein Beispiel einer reellen Funktion mit den folgenden Eigenschaften an (je 1 Punkt):
   - f ist integrierbar aber nicht differenzierbar.
   - f hat ein striktes lokales Minimum in ξ aber $f'(\xi) \neq 0$.

   (c) Berechne $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(4t)dt$. (2 Punkte)

Bitte umblättern!

4. *Vermischtes.*

   (a) *Hinreichende Bedingung für Extrema.* Für eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ formuliere hinreichende Bedingungen für die Existenz von Extremstellen und beweise sie. (4 Punkte)

   (b) *Differenzierbarkeit.* Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle ξ im Intervall I. Zeige, dass dann eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion r existieren mit

   $$f(\xi + h) - f(\xi) = ah + r(h) \text{ und } \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

   Fertige eine Skizze an, um die Sitation zu veranschaulichen. (4 Punkte)

   (c) *Lipschitz-Stetigkeit.* Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) mit beschränkter Ableitung, d.h. $\exists C : |f'(x)| \leq C \ \forall x \in (a, b)$. Zeige, dass f dann Lipschitz-stetig ist. (2 Punkte)

5. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (je 2 Punkte)

   (a) Jede zweimal differenzierbare Funktion ist stetig differenzierbar.

   (b) Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist auch $F - 2c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f