Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	$\sum$ /40

Note:

Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13

8. Prüfungstermin (16.5.2014)

Gruppe A

1. *Definitionen, Sätze & Beweise.*
   (a) Definiere die folgenden Begriffe: (je 1 Punkt)
   $\mathcal{C}^k$-Funktion ($k \in \mathbb{N}$), striktes lokales Extremum, Treppenfunktion.
   (b) Formuliere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. (1 Punkt)
   (c) Formuliere den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und beweise ihn. Wo und wie wird im ersten Teil die Stetigkeit der Funktion verwendet? (8 Punkte)

2. *Grundideen.*
   (a) Bekanntlich (Vo. $\boxed{3}$ Thm. 1.19) ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann in $\xi \in I$ differenzierbar, falls
   $$f(\xi + h) - f(\xi) = a\,h + r(h),$$
   wobei $a \in \mathbb{R}$ eine fixe Zahl und r eine reelle Funktion mit $r(h)/h \to 0$ für $h \to 0$ ist. In diesem Falle ist $a = f'(\xi)$.
   Diskutiere die Bedeutung dieser Aussage, fertige eine Skizze an und gehe insbesondere auf das Verhalten des „Fehlers", d.h. $r(h)/h \to 0$ ein. (4 Punkte)
   (b) Diskutiere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, seine anschauliche Bedeutung und Plausibilität. Nenne mindestens zwei Anwendungen des Satzes. (3 Punkte)

3. *Beispiele und Gegenbeispiele.*
   (a) Berechne (je 2 Punkte): $(x^x)''$, $\int \arctan(x)\,dx$.
   (b) Gib eine Funktion an, die weder konkav noch konvex ist (1 Punkt).
   (c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Bekannterweise ist f stetig und somit auch gleichmäßig stetig ($[0,1]$ ist kompakt). Zeige bzw. argumentiere nun (je 1 Punkt):
   - f ist diffenzierbar für alle $x \neq 0$.
   - f ist nicht differenzierbar in $x = 0$.
   - f ist nicht Lipschitz stetig.

Bitte umblättern!

4. *Vermischtes.*

   (a) *Differenzierbarkeit und Stetigkeit 1.* Zeige, falls $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in I$ ist, dann ist f schon stetig in ξ. (2 Punkte)

   (b) *Differenzierbarkeit und Stetigkeit 2.* Bekanntlich ist die Umkehrung der Aussage in (a) falsch. Diskutiere expizit ein Gegenbeispiel, bei dem zumindest eine der einseitigen Ableitungen nicht exisiert. Was bedeutet es anschaulich für eine Funktion zwar stetig aber (in einem Punkt) nicht differenzierbar zu sein?
   (2 Punkte)

   (c) Beweise: Hat eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ein lokales Extremum in einem inneren Punkt ξ des Intervalls I, dann verschwindet $f'(\xi)$. Warum muss vorausgesetzt werden, dass ξ innerer Punkt von I ist? (3 Punkte)

   (d) Berechne $\Big(\log\big(\arccos(x^2+4x)\big)\Big)'$. Begründe jeden deiner Schritte. (2 Punkte)

5. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (je 2 Punkte)

   (a) Jede stetig differenzierbare Funktion ist auch zweimal differenzierbar.

   (b) Jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auch Riemann integrierbar auf jedem Intervall $[a, b]$.