Prüfungsausarbeitung 2. TERMIN

2013-03-01

GRUPPE A

$\boxed{1}$ (a) •) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall). $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfkt von f auf I, falls

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

•) Sei $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Fkt mit der Eigenschaft f ist R-intbar auf jedem Intervall $[a,R]$, $a<R<\infty$. Falls $\lim\limits_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$ existiert und endlich ist, so heißt $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent und wir setzen

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$$

•) Sei φ eine TF auf $[a,b]$ mit Zerlegung $\{a=x_0,\dots,x_n=b\}$ und Werten $\varphi(x)=c_j$ für $x\in(x_{j-1},x_j)$, $1\le j\le n$. Dann definieren wir das Integral von φ auf $[a,b]$ als

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})$$

(b) (MWS $\int$). Seien $\varphi, f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi \ge 0$. Dann $\exists\, \xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(t)\varphi(x)dt = f(\xi)\int_a^b \varphi(t)dt$$

[1] (b) (Diffbarkeit der Umkehrfkt)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall) streng monoton & stetig. Falls f diffbar in $\xi \in I$ ist und $f'(\xi) \neq 0$, dann ist die Umkehrfkt [Zusegen Satz von der stetigen Umkehrfkt, Eidl A] $f^{-1}: J := f(I) \to I$ diffbar in $\eta := f(\xi)$ und es gilt

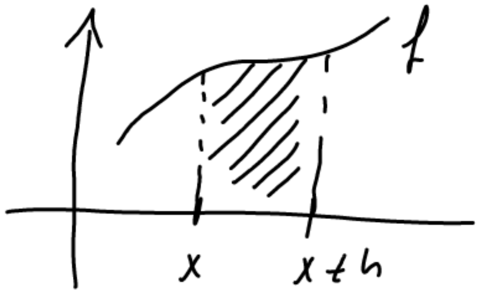
$$\left(f^{-1}\right)'(\eta) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(\eta)\right)}.$$

[1] (c) siehe Gruppe B [2] (b)

[2] (a) Sei $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ dann gilt für den Differenzenquotienten von F bei x:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = (*)$$

Der Zähler entspricht der schraffierten Fläche



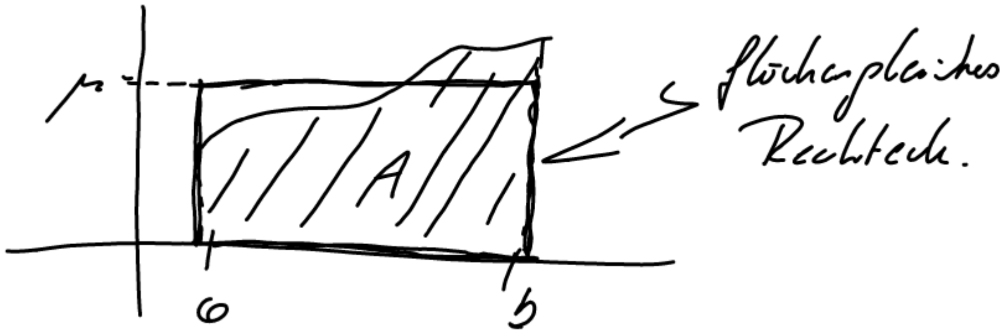
Diese ist ca. $f(x) \cdot h$ und daher

$$(*) \approx \frac{f(x) \cdot h}{h} = f(x)$$

(b) Für die genaue Formulierung siehe [1] (b). Für $\varphi \equiv 1$ ergibt sich $\exists \xi \in [a, b]: \int_a^b f(t)\,dt = f(\xi)(b-a)$

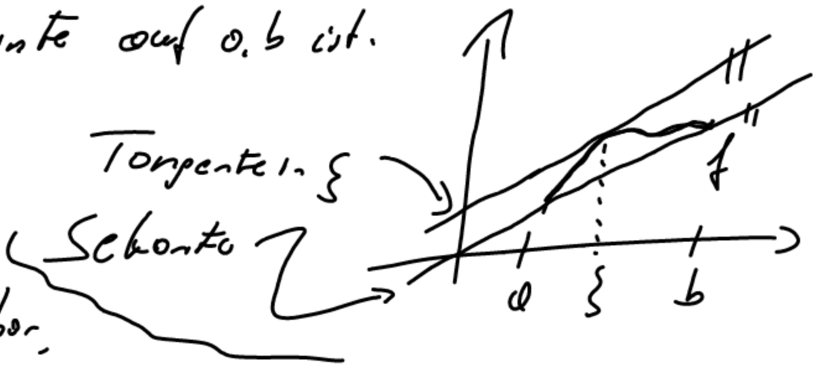
Die anschauliche Interpretation für der Einfachheit halber pos. f ist: $\int_a^b f(x)\,dt$ entspricht der

Fläche A unter dem Graphen von f. Anschaulich ist klar, dass es ein Rechteck über [a,b] mit Fläche A geben muß. Dessen Höhe μ liegt im Bild $f[a,b]$ und daher wird nach ZWS μ angenommen, d.h. $\exists \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi)=\mu$ also $A = f(\xi)(b-a)$



[2] (c) (MWS) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig & diffbar auf (a,b)
$\implies \exists \xi \in (a,b)$ sodass
$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Die anschauliche Bedeutung des MWS ist, dass es einen Pkt $\xi \in (a,b)$ gibt in dem die Tangente parallel zur Schante auf a,b ist.



[3] (a) (Extrema)
Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diffbar, $\xi \in (a,b)$ und f 2x diffbar in ξ. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi)=0 \\ f''(\xi)<0 \ (>0) \end{array}\right\} \implies$$ f hat in ξ ein strikter lokales Max. (Min)

Beweis. Sei ξ wie in der Formulierung, $f'(\xi)=0$ $f''(\xi)<0$ [der andere Fall ist analog]

$$\Rightarrow \quad 0 > f''(\xi) = \lim_{\xi \neq x \to \xi} \frac{f'(\xi)-f'(x)}{\xi - x}$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ sodass } \quad 0 > \frac{f'(\xi)-f'(x)}{\xi-x} \overset{f'(\xi)=0}{=} \frac{f'(x)}{\xi-x} \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in (\xi-\varepsilon,\xi) : f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ str. mon. wachsend} \\ \forall x \in (\xi,\xi+\varepsilon) : f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ str. mon. fallend} \end{cases}$$

$\Rightarrow \xi$ ist striktes lok Max

□

$\boxed{3}$ (b) (Monotonie)

Beweis von „$\Rightarrow$": Indir ang f nicht mon wachsend

$$\Rightarrow \exists\, x<y \in [a,b] : f(x) > f(y)$$

$$\overset{MWS}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in (x,y) : \quad f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$\Rightarrow f'(\xi) < 0 \quad \Rightarrow$ Wid. zur Voraussetzung. □

Die Umkehrung ist ebenfalls korrekt & einfach zu beweisen, denn sei f mon. wachsend $\Rightarrow \forall x \neq y \in (a,b)$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0 \quad \Rightarrow f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$$

□

$\boxed{4}$ (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $(0,1]$ ist nach oben unbeschr.

$\left[\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty \right]$ aber uneigentlich int.bar

$$\left[\int_\varepsilon^1 x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} \Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2 \quad (\varepsilon \to 0) \right]$$

(b) $$\int_0^1 \underset{f}{x} \underset{g'}{e^x} \, dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1$$

(c) $$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2x) dx \underset{\left[\begin{smallmatrix} y = 2x \\ dy/dx = 2 \end{smallmatrix}\right]}{=} \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(y)\, dy = \frac{1}{2} \sin(y) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2} (1 - (-1)) = \underline{\underline{1}}$$

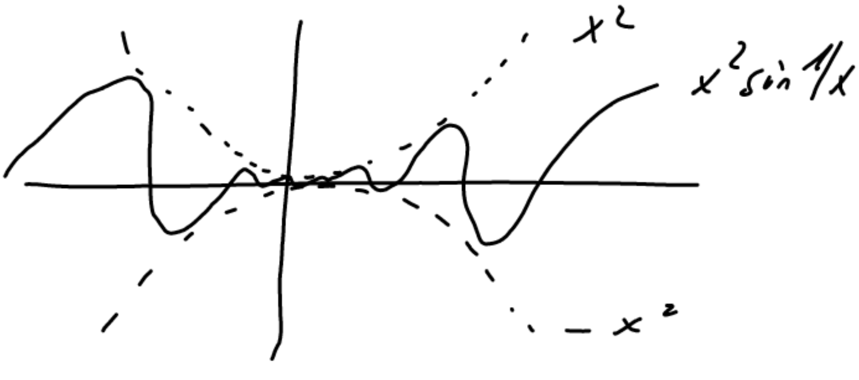
(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist diffbar in 0 mit $f'(0) = 0$ denn

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \sin 1/h \to 0 \quad (h \to 0)$$

Aber für $x \neq 0$ gilt

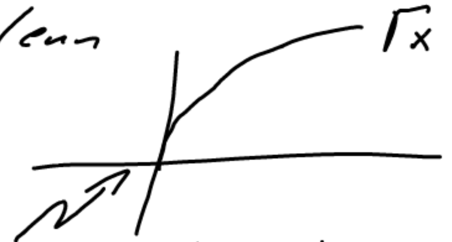
$$f'(x) = \underbrace{2x \sin(1/x)}_{\to 0 \ (x \to 0)} - \underbrace{\cos(1/x)}_{\nexists \lim_{x \to 0}} \text{ und } f'(x) \not\to f'(0)$$

Also ist $x \mapsto f'(x)$ in 0 nicht stetig.



$\boxed{5}$ (a) falsch, denn $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig auf $[0,1]$, diffbar auf $(0,1]$ aber nicht diffbar in $x=0$, denn

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = 1/\sqrt{x} \to \infty$$



(b) falsch, denn $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist diffbar aber das globale Max ist in 0

(c) Richtig, denn für $\varphi \in T[a,b]$ ist φ selbst zulässige Fkt in der Def der Ober- und Unterintegrals und es gilt $\int_{a*}^{b} \varphi = \int_{a}^{*b} \varphi$.

GRUPPE B

$\boxed{1}$ (a) siehe Gruppe A, $\boxed{2}$ (c)
(b) —"— (a)
(c) —"— (b)

$\boxed{2}$ (a)

- Sei $f: I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall). Ein Pkt $\xi \in I$ heißt <u>str. lok. Max.</u> falls $\exists \varepsilon > 0$: $f(x) < f(\xi)$ $\forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I$

•) Sei $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ eine Fkt, sodass f R-intbar auf jedem Intervall der Form $[a+\varepsilon, b]$ $(\varepsilon > 0)$.
Falls $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(t)dt$ existiert & endlich ist, dann heißt das Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergent und wir sehen

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(t)dt.$$

•) siehe Gruppe [A] 1(a)

[2] (b) (Kettenregel) Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und seien $f: I \to \mathbb{R}$ und $g: J \to \mathbb{R}$ reelle Fkt mit $f(I) \subseteq J$. Falls f diffbar in $\xi \in I$ und g diffbar in $f(\xi) \in J$ ist, dann ist die Verknüpfung

$$g \circ f: I \to \mathbb{R}$$

diffbar in ξ und es gilt $\boxed{(g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)}$

Beweis. Seien h, k so, dass $\xi + h \in I$, $f(\xi) + k \in J$

f diffb. in $\xi \overset{(1)}{\Rightarrow} f(\xi+h) - f(\xi) = f'(\xi) \cdot h + r_1(h)$, wobei

$$\frac{r_1(h)}{h} \to 0 \quad (h \to 0) \qquad (*)$$

g diffbar in $f(\xi) \overset{(2)}{\Rightarrow} g(f(\xi)+k) - g(f(\xi)) = g'(f(\xi))k + r_2(k)$

$$\text{mit } \frac{r_2(k)}{k} \to 0 \quad (k \to 0) \qquad (**)$$

$$\Longrightarrow g\circ f(\xi+h) - g\circ f(\xi) = g(f(\xi+h)) - g(f(\xi))$$

(**), $k = f(\xi+h) - f(\xi)$

$$= g'(f(\xi))\big(f(\xi+h) - f(\xi)\big) + r_2\big(f(\xi+h) - f(\xi)\big)$$

$$\overset{(*)}{=} g'(f(\xi))\big(f'(\xi)h + r_1(h)\big) + r_2\big(f'(\xi)h + r_1(h)\big)$$

$$= g'(f(\xi))\, f'(\xi) h + r(h)$$

Dabei ist $r(h) = r_1(h)\, g'(f(\xi)) + r_2\big(f'(\xi)h + r_1(h)\big)$

und

$$\frac{r(h)}{h} = g'(f(\xi)) \underbrace{\frac{r_1(h)}{h}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{r_2\big(f'(\xi)h + r_1(h)\big)}{\underbrace{f'(\xi)h}_{\to 0} + \underbrace{r_1(h)}_{\to 0}}}_{\to 0} \cdot \left(f'(\xi) + \frac{r_1(h)}{h}\right)$$

$$\to 0 \quad (h \to 0).$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} (g\circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) \qquad \square$$

<u>Idee & Verlauf des Beweises</u>. Der Beweis ist eine Anwendung der Charakterisierung der Ableitung als lin. Bestapproximation:

$$\left\{ f \text{ diffbar in } \xi \iff \begin{array}{l} \exists a \in \mathbb{R}\ \exists r: I \to \mathbb{R} \\ f(\xi+h) - f(\xi) = ah + r(h) \text{ und} \\ r(h)/h \to 0 \ (h \to 0) \end{array} \right.$$

wobei in diesem Fall $a = f'(\xi)$ gilt.

Zunächst wird in (1), (2) die „Hinrichtung" für f bzw g verwendet. Nach einer (länglichen aber wenig inspirierten) Rechnung mit den „Resten" r_1, r_2 wird in (3) die Rückrichtung verwendet um auf die Diffbarkeit von $g \circ f$ zu schließen bzw die Ableitung auszudrücken.

$\boxed{2}$ (c) siehe Gruppe A, $\boxed{1}$ (b)

$\boxed{3}$ (a) Monotonie.

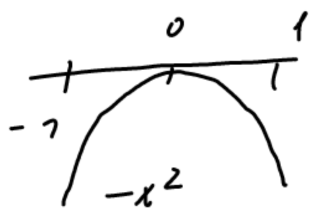
Beweis siehe Gruppe A, $\boxed{3}$ (b) mit den Ersetzungen

$$f(x) \geq f(y) \text{ und } f'(\xi) \leq 0$$

Die Rückrichtung ist falsch, denn $f(x) = x^3$ ist auf $\mathbb{R}$ streng mon wachsend aber $f'(0) = 0$.

(b) siehe Gruppe A, $\boxed{3}$ (a)

$\boxed{4}$ (a) falsch; Gegenbsp $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = -x^2$ nimmt ihr glob. Max in $x = 0$ an



(b) falsch; es gibt keinen Grund warum f in a stetig sein sollte.

Ein explizites Gegenbsp ist $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, denn f ist diffbar auf $(0, 1]$ [Verknüpfung diffbarer Fkt] aber in $x = 0$ nicht stetig, da $\lim_{x \searrow 0} \sin 1/x$ nicht existiert.

(c) Ja, das ist Teil der Def. von R-intbar.

$\boxed{5}$ (a) $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ ist beschränkt $[0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall x \in [1,\infty)]$ aber nicht uneig. intbar, denn

$$\int_1^R 1/x \, dx = \log(R) \to \infty \quad (R \to \infty)$$

(b) siehe Gruppe A, $\boxed{4}$ (d)

(c) Siehe Gruppe A, $\boxed{4}$ (b)

(d) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x)\,dx = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(y)\,dy = 2\sin(y)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$\left[\begin{array}{l} y = x/2 \\ dy/dx = 1/2 \end{array}\right]$

$$= 2\left(1-(-1)\right) = 4$$