PRÜFUNGSAUSARBEITUNG

3. TERMIN
2013-04-19

GRUPPE A:

[1] (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt.

- Sei $\xi \in I$ fix. Für $I \ni x \neq \xi$ nennen wir den Ausdruck
$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$
Differenzenquotient von f bei ξ.

- Wir nennen f Lipschitz-stetig auf I, falls
$$\exists C>0: \ |f(x)-f(y)| \leq C\,|x-y| \quad \forall x,y \in I$$

- Wir nennen ξ ein (nicht-striktes) lokales Maximum, falls
$$\exists \varepsilon>0: \ f(x) \leq f(\xi) \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I.$$

(b) SATZ (Diffbarkeit der Umkehrfkt)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton & stetig. Ist f diffbar in $\xi \in I$ mit $f'(\xi) \neq 0$, dann ist die Umkehrfkt $f^{-1}: f(I) \to I$ diffbar in $\eta := f(\xi)$ und es gilt
$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}.$$

Diskussion: ◦ Die Umkehrfkt f^{-1} ist auf einem Intervall definiert & stetig wegen des Satzes von der stetigen Umkehrfkt (EidA).

◦ Die Bedingung $f'(\xi) \neq 0$ ist notwendig, weil angenommen f diffbar in ξ, f^{-1} diffbar in $\eta = f(\xi)$ dann gilt

$$(f^{-1} \circ f)(\xi) = \xi = id(\xi)$$

$$\overset{\text{diff}}{\Longrightarrow} (f^{-1} \circ f)'(\xi) \underset{\text{Kettenregel}}{=} (f^{-1})'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) = 1$$

$\Longrightarrow f'(\xi) \neq 0$ und es gilt die Formel $(f^{-1})'(\eta) = \dfrac{1}{f'(\xi)}$

Beweisidee: Wir zeigen, dass der Differenzenquotient von f^{-1} in η einen (endl.) Limes hat. Im Verlauf der Rechnung ergibt sich dann (wie oben) die Formel.

Beweis: Sei $(\eta_n)_n$ eine Folge in $f(I)$ mit $\eta_n \to \eta$, $\eta_n \neq \eta$ $\forall n$

f bij $\Rightarrow \xi_n := f^{-1}(\eta_n)$ ist Folge in I, $\xi_n \neq \xi$ $\forall n$

f^{-1} stetig $\Rightarrow \xi_n \to f^{-1}(\eta) = \xi$

Nun verwenden wir η_n um den Limes des Differenzenquotienten zu berechnen:

$$\frac{f^{-1}(\eta_n) - f^{-1}(\eta)}{\underbrace{\eta_n - \eta}_{\neq 0}} = \frac{\xi_n - \xi}{f(\xi_n) - f(\xi)} \xrightarrow[(n \to \infty)]{\substack{f \text{ diffbar in } \xi \\ f'(\xi) \neq 0}} \frac{1}{f'(\xi)}$$

$\Longrightarrow f^{-1}$ diffbar in η mit $(f^{-1})'(\eta) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}$ $\square$

$\boxed{1}$ (c) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f auf $[a,b]$ R-intbar

<u>Beweisprinzip</u>: Wir verwenden folgende Charakterisierung der R-Intbarkeit für $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt.

f R-intbar $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \varphi, \psi \in T[a,b]$ mit

$$(1)\quad \begin{aligned} &\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x) \quad \forall x\in[a,b] \text{ und} \\ &0 \le \int_a^b \psi(t)\,dt - \int_a^b \varphi(t)\,dt \le \varepsilon \end{aligned}$$

Da f stetig auf $[a,b]$ ist, gilt folgender Satz über die Approximation von f durch Treppenfkt

$$(2)\quad \forall \varepsilon'>0\ \exists\, \varphi,\psi\in T[a,b] \text{ mit } \varphi \le f \le \psi \text{ und } |\varphi(x)-\psi(x)| \le \varepsilon' \quad \forall x\in[a,b]$$

Jetzt müssen wir lediglich diese beiden Resultate zusammensetzen: f ist als stetige Fkt auf $[a,b]$ beschränkt. Für gegebenes $\varepsilon>0$ $\exists\, \varphi,\psi$ wie in (2) mit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Diese erfüllen die Bedingung in (1), denn

$$0 \le \int_a^b \psi(t)\,dt - \int_a^b \varphi(t)\,dt \underset{\text{Linearität des }\int}{=} \int_a^b (\psi-\varphi)(t)\,dt \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt = \varepsilon .$$

Damit ist f nach obiger Charakterisierung R-intbar auf $[a,b]$. $\square$

[2] (a) Wir „berechnen" den Differenzenquotienten von F:

$$\frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h} = \frac{\int_0^{\xi+h} f - \int_0^{\xi} f}{h} = \frac{\int_\xi^{\xi+h} f}{h}$$

$$= \frac{\quad}{h} \approx \frac{h \cdot f(\xi)}{h} = f(\xi)$$

(b) Die Aussage bedeutet, dass das Inkrement (Zunahme) von f bei ξ definiert als $\varphi(h)=f(\xi+h)-f(\xi)$ bis auf einen Fehler $r(h)$ proportional zu h ist.

Anders ausgedrückt ist das Inkrement bis auf den Fehler durch die lineare Fkt

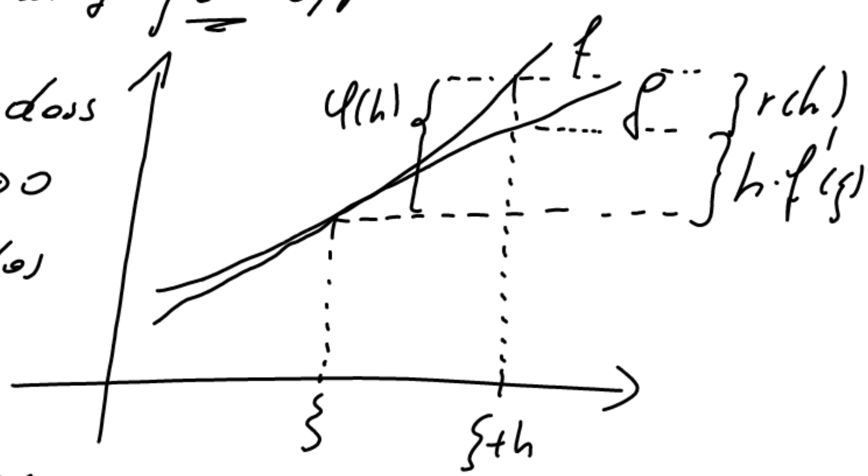
$$h \mapsto f'(\xi)\cdot h$$

gegeben.

Geometrisch bedeutet die Aussage, dass die Tangente an f im Pkt ξ

$$g(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)$$

nahe ξ die Fkt f gut approximiert.



„Gut" bedeutet, dass nicht nur $r(h) \to 0$ $(h \to 0)$ – denn das ist für jede Gerade durch $(\xi, f(\xi))$ der Fall, sondern, dass sogar $\frac{r(h)}{h} \to 0 \quad (h \to 0)$.

$\boxed{3}$ (a) $1 = \log'(1) \leftarrow \frac{\log(1+\frac{1}{n}) - \log(1)}{1/n} = n \log(1+1/n)$

$$= \log(1+1/n)^n$$

(b) ZZ: $f,g : I \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \Rightarrow f \cdot g$ diffbar in ξ und $\underline{(fg)'(\xi) = (f'g)(\xi) + (fg')(\xi)}$

Sei $h \neq 0$, $\xi + h \in I$ dann gilt

$$\frac{(fg)(\xi+h) - (fg)(\xi)}{h} = \frac{1}{h}\Big(f(\xi+h)\big(g(\xi+h) - g(\xi)\big) + \big(f(\xi+h) - f(\xi)\big) g(\xi) \Big)$$

$$= f(\xi+h) \frac{g(\xi+h) - g(\xi)}{h} + \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} g(\xi)$$

$$\to f(\xi) g'(\xi) + f'(\xi) g(\xi) \quad (h \to 0)$$

(c) $(x^\alpha)' = \big(\exp(\alpha \log(x))\big)'$

Def x^α $\quad = \exp'(\alpha \log(x)) \cdot (\alpha \log(x))'$ Def x^α

Kettenregel $\quad = \exp(\alpha \log(x))\, \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \alpha \frac{1}{x}$

$\exp' = \exp$, $\log'(x) = 1/x$, Produktregel $\quad = \underline{\alpha x^{\alpha - 1}}$

4 (a) • Jede Treppenfkt; explizit $H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$
ist R-intbar auf $[-1, 1]$

• $f(x) = -x^3$ ist streng mon fallend aber
$f'(0) = 0$

(b) $$\int \underset{f'}{x^3} \underset{g}{\log(x)}\, dx = \frac{x^4}{4} \log(x) - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x}\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(x^4 \log(x) - \frac{x^4}{4}\right)$$
$$= \underline{\frac{x^4}{16}\left(4 \log(x) - 1\right)}$$

(c) $x^\alpha \to \infty \quad (x \to \infty,\ \alpha > 0)$
$\log(x) \to \infty \quad (x \to \infty)$

$$\xRightarrow{\text{de l'Hospital}} \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log(x)} = \lim \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \lim \alpha x^\alpha = \infty$$

$x \to 0 \quad (x \to 0)$
$\sin(x) \to 0 \quad (x \to 0)$ $\xRightarrow{\text{de l'H.}} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \lim \frac{1}{\cos(x)} = \underline{1}$

5 (a) Ja, denn f Lip $\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$

$\Longrightarrow f(x) \to f(y) \quad (x \to y) \Rightarrow f$ stetig

(b) Ja, weil $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b] \Rightarrow \varphi + \psi \in \mathcal{T}[a,b]$
$\varphi \in \mathcal{T}[a,b],\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$
[durch geeignetes „Kombinieren" der Zerlegungen]

$\boxed{5}$ (c) Ja, denn

$$\int_1^R \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^R = \frac{1}{2} - \frac{1}{2R^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (R \rightarrow \infty)$$

GRUPPE B

$\boxed{1}$ (a) siehe Gruppe A $\boxed{2}$ (b)

(b) ——"—— $\boxed{2}$ (a)

$\boxed{2}$ (a) siehe Gruppe A $\boxed{1}$ (a) ; aber Min statt Max

(b) ——"—— $\boxed{1}$ (c)

(c) ——"—— $\boxed{1}$ (b)

$\boxed{3}$ (a) siehe Gruppe A $\boxed{4}$ (c) ; allerdings die Kehrwerte

(b) ——"—— $\boxed{4}$ (b)

(c) ——"—— $\boxed{4}$ (a)

$\boxed{4}$ (a) ——"—— $\boxed{3}$ (b)

(b) ——"—— $\boxed{3}$ (c)

(c) ——"—— $\boxed{3}$ (a)

$\boxed{5}$ (a) NEIN, denn $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_\varepsilon^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \rightarrow \infty$

$(\varepsilon \rightarrow 0)$

(b) siehe Gruppe A $\boxed{5}$ (b)

(c) ——"—— $\boxed{5}$ (a)