Prüfungsausarbeitung

4. Termin
2013-06-16

1 (a) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine reelle Fkt auf einem Intervall. $\xi \in I$ heißt striktes lokales Maximum [Minimum], falls $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I : f(x) < f(\xi) \quad [f(x) > f(\xi)]$.

Eine Fkt $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfkt, falls es eine endliche Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ von $[a,b]$ gibt [d.h. $t_j \in [a,b]$ sodass $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$] und Konstanten $c_j \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le n$ sodass

$$\varphi(t_j) = c_j \quad \forall x \in (t_{j-1}, t_j) \quad (1 \le j \le n)$$

Eine Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) heißt C^k-Funktion, falls sie k-mal stetig diffbar ist [d.h. k-mal diffbar & $f^{(k)}$ stetig].

(b) Sei $I = (a,b)$ ein offenes eventuell unbeschränktes Intervall (d.h. $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$)
und seien $f, g: I \to \mathbb{R}$ diffbar mit $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$
Falls (i) $\lim_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \searrow a} g(x)$ oder

(ii) $\lim_{x \searrow a} g(x) = \pm\infty$

Dann gilt
$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
falls der 2. Limes (evtl. auch uneigentl.) existiert. [Analog f. $x \nearrow b$]

11 (c) (HsDI) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, a beliebig im Intervall I.

(i) Die Fkt $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad x \in I$

ist stetig diff'bar und es gilt $F' = f$.

(ii) Sei G (irgend)eine Stammfkt von f und $b \in I$ dann gilt $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$.

Beweisgang: (i) Der Differenzenquotient von F kann direkt berechnet werden; unter Verwendung des MWS der Intrechnung ergibt sich das Resultat.

(ii) Man verwendet dass jede Stammfkt G sich als $F + c$ schreiben lässt, wobei F die Stammfkt aus (i) ist. Dann ergibt eine einfache Rechnung das Gewünschte

Beweis (i) f stetig ① $\Rightarrow$ f R-intbar und F ist sinnvoll definiert. Wir berechnen F'. Dazu sei $x \in I$ $h \neq 0$ so klein, dass $x + h \in I$. Dann gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$\overset{\text{MWS-}\int}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in [x, x+h] \text{ mit } \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi) \cdot h$$

Falls $h \to 0 \Rightarrow \xi \to x$ und daher weil f stetig ②

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi) \to f(x) \quad (h \to 0)$$

$\Rightarrow$ F diff'bar mit $F' = f \Rightarrow F \in C^1$ & Stammfkt.

[1] (c) Beweis (ii): F wie in (i) ist Stammfkt von f.

Es gilt: Jede Stammfkt G von f ist von der Form $G = F + c$ $(c \in \mathbb{R})$

Daher gilt

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) \overset{(i)}{=} \int_a^b f(t)\,dt - 0.$$

$\square$

Die Stetigkeit wird im Beweis von (i) zweimal verwendet (siehe oben) in Teil (ii) insofern als (i) verwendet wird.

[2] (a) $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ und daher nach Umkehrsatz

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \overset{\sin' = \cos}{=} \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \overset{\cos^2 = 1-\sin^2}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} \overset{\arcsin = \sin^{-1}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(b) • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ hat ein striktes lok. Minimum in $\xi = 0$ $[\,|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \iff x = 0\,]$ aber $f'(0)$ existiert nicht [die linksseitige Abl. $= -1$ stimmt nicht mit der rechtsseitigen $= +1$ überein.]

• Jede stetige Fkt die nicht diff'bar ist oder jede Treppenfkt.

|2| (c) $$\int_0^{\pi/6} \cos(3t)\,dt = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos(y)\,dy = \frac{1}{3}\sin(y)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$\begin{bmatrix} y = 3t,\ dy/dt = 3 \\ 0 \le t \le \pi/6 \\ 0 \le y \le \pi/2 \end{bmatrix} \qquad = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

|3| Sei $\varphi \in T[a,b]$ mit Zerlegung $Z = \{a = t_0 < \dots t_n = b\}$ und $\varphi(t) = c_j \ \forall\ t_{j-1} < t < t_j \ (1 \le j \le n)$ dann ist $\int_a^b \varphi$ definiert als

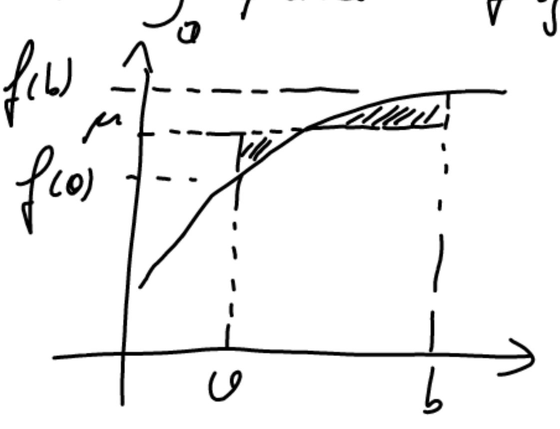
$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \sum_{j=1}^n c_j (t_j - t_{j-1})$$

Zunächst ist $T[a,b]$ ein VR [genauer ein Teilraum von $F[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$, weil $f, g \in T[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f+g, \lambda f \in T[a,b]$]

Die Aussage bedeutet, dass $\int : T[a,b] \to \mathbb{R}$ eine lineare & monotone Abbildung ist, d.h. genauer

- $f, g \in T[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$
  $$\Longrightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$$
- $f \le g \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$

(b) $\int_a^b f(t)\,dt = f(\xi)(b-a)$ für ein $\xi \in [a,b]$



Es ist anschaulich klar, dass es zur Fläche $\int_a^b f$ also der Fläche unter dem Graphen ein flächengleiches Rechteck mit Basis $(b-a)$

geben muß. Sei μ die Höhe des Rechtecks, dann muß (wiederum anschaulich klar) μ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegen also sagt der Zwischenwertsatz (f ist als stetig vorausgesetzt) ⟺ das ist das prominente Resultat

$\exists \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$ und somit ergibt sich die Aussage.

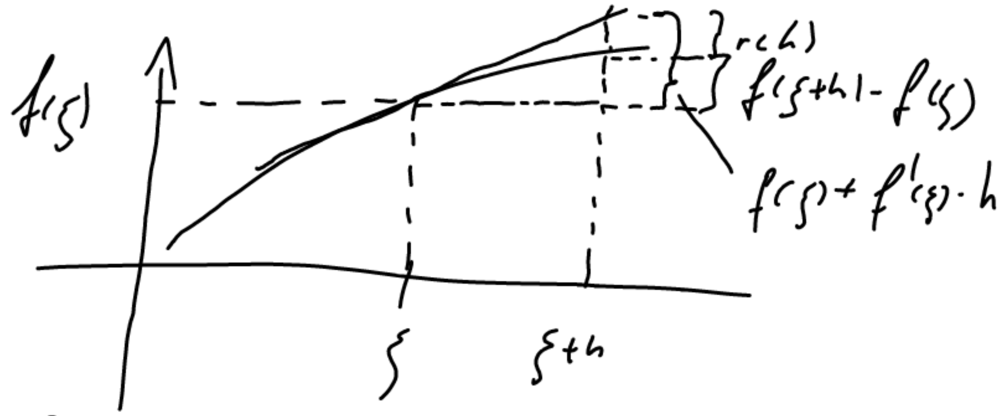
Eine prominente Abschätzung aus dem MWS-$\int$ lautet wie folgt: Sei $f(x) \leq C \; \forall x \in [a,b]$ dann gilt

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx} = f(\xi)(b-a) \leq \underbrace{C(b-a)}.$$

[4] (a) Sei f diffbar in ξ, dann gilt

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - f'(\xi) =: \frac{r(h)}{h}$$

also $a = f'(\xi)$ also $r(h) = f(\xi+h) - f(\xi) - f'(\xi)\cdot h$

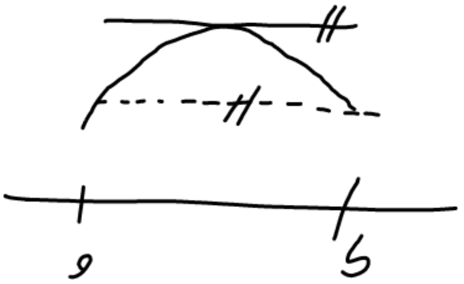


[Insbesondere geht der Rest $r(h)$ schnell gegen 0, im präzisen Sinne von $r(h)/h \to 0$ $(h\to 0)$. Nur $r(h) \to 0$ gilt für jede Gerade der Form $f(\xi) + ch$ $c \in \mathbb{R}$ beliebig !]

4 (b) <u>Satz von Rolle</u>: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig & differenzierbar auf (a,b) mit $f(a)=f(b)$. Dann gilt $\exists\, \xi\in[a,b]$ mit $f'(\xi)=0$.

Eine anschauliche Erklärung ist, dass falls wir f als die Höhenfunktion einer Bergwanderung interpretieren und wir am Beginn $(t=a)$ und am Ende $(t=b)$ auf gleicher Höhe sind wir nicht immer nur bergauf oder bergab gegangen sein können. Angenommen wir sind zu Beginn bergauf gegangen, dann müssen wir genau da wo wir zum Bergabgehen gewechselt sind kurz eben gegangen sein – nämlich am Gipfel; dort gilt $f'(\xi)=0$.

Eine andere Veranschaulichung kann am Graphen von f diskutiert werden. Es muß einen Punkt geben an dem die Tangente // zur Sekante ist, also waagrecht.



(c) Folgt direkt aus dem MWS: Seien $x<y\in[a,b]$

$$\overset{\exists\,\xi\in[x,y]}{\Longrightarrow}\; f(y)-f(x)=f'(\xi)(y-x)$$

$$\Longrightarrow\; |f(y)-f(x)|\leq C|y-x|$$

4 (d) Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diffbar und 2-mal diffbar in $\xi\in(a,b)$, dann gilt

$$f'(\xi)=0,\ f''(\xi)<0\ [>0] \Rightarrow f \text{ hat in } \xi \text{ ein striktes lok Max [Min]}$$

<u>Beweis.</u> Wir behandeln nur den Fall des Max [Min analog]

Für f, ξ wie oben gilt

$$0 > f''(\xi) = \lim_{\xi\neq x\to\xi} \frac{f'(\xi)-f'(x)}{\xi-x}$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon>0\ \forall x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon):\ 0 > \frac{\overbrace{f'(\xi)}^{=0 \text{ lt. Voraus}}-f'(x)}{\xi-x} = \underline{\frac{f'(x)}{x-\xi}}$$

$$\Rightarrow \forall x\in(\xi-\varepsilon,\xi):\ f'(x)>0 \Rightarrow f \text{ str. mon wachsend}$$
$$\forall x\in(\xi,\xi+\varepsilon):\ f'(x)<0 \Rightarrow \text{—"— fallend}$$

$\Rightarrow \xi$ ist str. lok Max

]

5 (a) <u>Falsch</u>, zB

$f(x)=|x|$ auf $\mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig, denn

$$|f(x)-f(y)| = \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$$

Folgerung aus der Δ-Ugl

aber <u>nicht diffbar</u> in $x=0$

(b) <u>RICHTIG</u>, denn $(F+c)' = F'+0 = f$