Prüfungsvorbereitung 2013-11-12

6. TERMIN

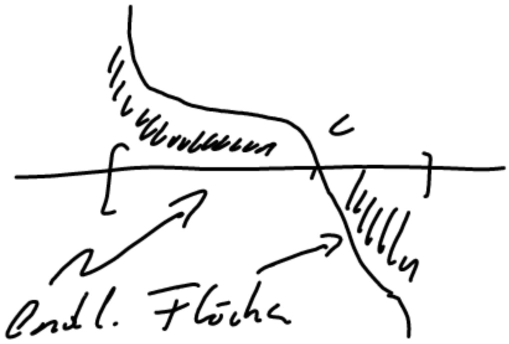
1 (a) $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt uneigentlich integrierbar und $\int_a^b f$ konvergent, falls

- f R-intbar auf jedem Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $a < \alpha < \beta < b$ ist und

- für beliebiges $c \in (a,b)$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f$, $\int_c^b f$ konvergieren.

Wir sehen $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ [was von der Wahl von c nicht abhängt]

Skizze:



$A \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt konvex, falls mit je 2 Punkten auch die Verbindungsgerade in A liegt.

11] (b) Sei $\xi \in (a,b)$ oBdA lok Max

$$\overset{\text{Lf. Def}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(\xi): f(\xi) \geq f(x)$$

$$\overset{f \text{ diffb.}}{\Longrightarrow} \lim_{x \nearrow \xi} \underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\geq 0} = f'(\xi) = \lim_{x \searrow \xi} \underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\leq 0} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \underline{f'(\xi) = 0}$$ ⌋

Falls $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar und I nicht offen ist, so muß ξ als innerer Pkt vorausgesetzt werden. Am Rand muß die Aussage nämlich nicht stimmen

ZB: $f(x) = x$ auf $[0,1]$ hat in $\xi = 1$ ein Max aber $f'(1) = 1$.

Im Beweis geht das Argument in $(*)$ schief, da für ξ ein Randpkt nur eine Seite der Lsg überhaupt existiert!

(c) Seien $f, \varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ sodass

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt = f(\xi)\int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

Beweis: f stetig, $[a,b]$ kp $\Rightarrow$ f beschränkt auf $[a,b]$
Satz v. Max

$$\Rightarrow \exists m, M : m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$

$\overset{\varphi \geq 0}{\Longrightarrow} \quad m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi \quad$ auf $[a,b]$

Monotonie des $\int$ $\Longrightarrow \quad m\int_a^b \varphi \leq \int_a^b f\varphi \leq M\int_a^b \varphi$

$\Longrightarrow \quad \exists \mu \in [m,M] : \quad \mu \int_a^b \varphi = \int_a^b f\varphi$

$\overset{ZWS}{\Longrightarrow}$ $\exists \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$, also insgesamt

$\exists \xi : \quad \int_a^b f(t)\varphi(t) = f(\xi)\int_a^b \varphi(t)\,dt \qquad \square$

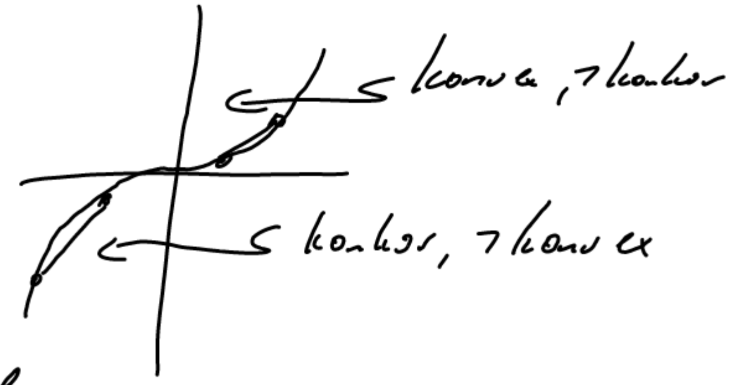
$\boxed{2}$ (a) $\quad x^x = e^{x\log(x)}$

$\boxed{\text{Sorry siehe hinten}}$

$(x^x)' = (\log(x)+1)\,x^x$

$(x^x)'' = \frac{1}{x}x^x + (\log(x)+1)^2 x^x = \underline{\left(\frac{1}{x} + (\log(x)+1)^2\right)x^x}$

(b) $f(x) = x^3$ auf $\mathbb{R}$



(c) $\bullet$ $\xi > 0$: $\quad \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = \frac{\sqrt{\xi+h}-\sqrt{\xi}}{h} = \frac{\xi+h-\xi}{h\left(\sqrt{\xi+h}+\sqrt{\xi}\right)}$

$$= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\xi+h}+\sqrt{\xi}}_{\sqrt{\ }\text{ stetig}}} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \quad (h \to 0)$$

Also für $x>0$: $(\sqrt{x})' = 1/2\sqrt{x}$

• $\xi = 0$: $\underset{(h>0)}{}$ $\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \to \infty \ (h \to 0)$

Also $\sqrt{x}$ nicht diff'bar für $x=0$.

• f Lip $:\Leftrightarrow \exists C: |f(x)-f(y)| \leq C|x-y| \ \forall x,y$

ang $\sqrt{x}$ Lip $\Rightarrow \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{|x-y|} \leq C \quad \forall x,y \in [0,1]$

setze $x=0 \Rightarrow \frac{\sqrt{y}}{|y|} = \frac{1}{\sqrt{y}} \leq C \quad \forall y \in [0,1]$ ↯ für $y \to 0$

$\Rightarrow \sqrt{}$ nicht Lip auf $[0,1]$

13 (a) Die Aussage bedeutet, dass das Inkrement (Zunahme) von f bei ξ definiert als $\varphi(h) = f(\xi+h)-f(\xi)$ bis auf einen Fehler $r(h)$ proportional zu h ist.

Anders ausgedrückt ist das Inkrement bis auf den Fehler durch die lineare Fkt

$$h \mapsto f'(\xi)\cdot h$$

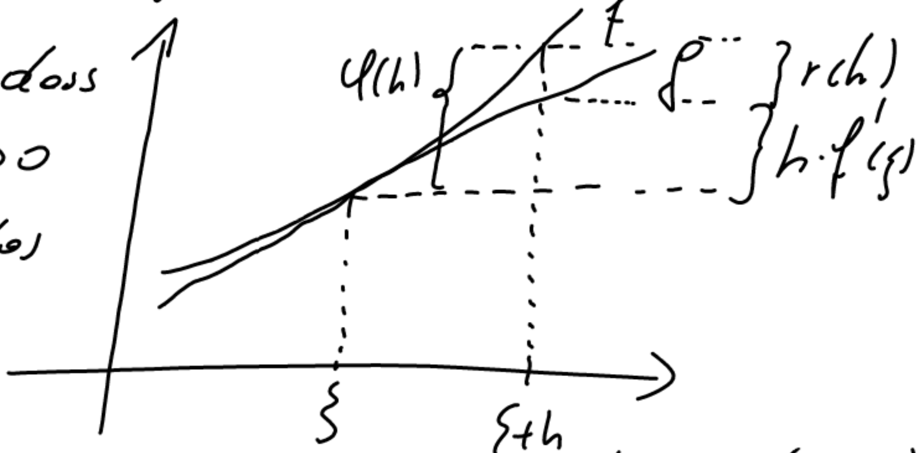
gegeben.

Geometrisch bedeutet die Aussage, dass die Tangente an f im Pkt ξ

$$g(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)$$

nahe ξ die Fkt f gut approximiert.

„Gut" bedeutet, dass nicht nur $r(h) \to 0$ $(h \to 0)$ – denn das ist für jede Gerade durch



$(\xi, f(\xi))$ der Fall, sondern dass sogar $r(h)/h \to 0$ $(h \to 0)$.

[3] (b) Sei $\varphi \in T[a,b]$ mit Zerlegung $Z = \{a = t_0 < \ldots t_n = b\}$ und $\varphi(t) = c_j$ $\forall\, t_{j-1} < t < t_j$ $(1 \le j \le n)$ dann ist $\int_a^b \varphi$ definiert als

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} c_j (t_j - t_{j-1})$$

Zunächst ist $T[a,b]$ ein VR [genauer ein Teilraum von $F[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$, weil $f, g \in T[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f+g,\ \lambda f \in T[a,b]$]

Die Aussage bedeutet, dass $\int : T[a,b] \to \mathbb{R}$ eine lineare & monotone Abbildung ist, d.h. genauer

- $f, g \in T[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\Longrightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$$
- $f \le g \Longrightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$

$\boxed{14}$ (a) Beweis: Indir. ang. f nicht monoton wachsend

$\Longrightarrow \exists x_1 < x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) > f(x_2)$

$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in (x_1, x_2)$ mit $\quad f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \quad \lightning$

$\square$

Es gilt auch die Umkehrung: f mon. wachsend

$\Rightarrow \forall x \neq \xi \in (a,b): \quad \dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0$

Zähler & Nenner haben gleiches VZ

$\overset{\text{Def } f'}{\Longrightarrow} f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in (a,b)$

$\square$

(b) $1 = \log'(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(1+1/n) - \log(1)}{1/n}$

$n \log(a) = \log(a^n)$

$\overset{\log(1)=0}{=} \lim \left(n \log(1+1/n)\right) = \lim \left(\log(1+1/n)^n\right)$

$\overset{\log \text{ stetig}}{=} \log \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (*)$

$\exp^{-1} = \log$

$\Rightarrow \underline{e} = e^1 \overset{(*)}{=} e^{\log \lim (1+1/n)^n} = \underline{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

(c) $f(x) = \arctan(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+x^2} > 0 \quad \forall x$

Abl. Umkehrfkt

$\Rightarrow \nexists$ lok Extr

f str. mon wachsend

$f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

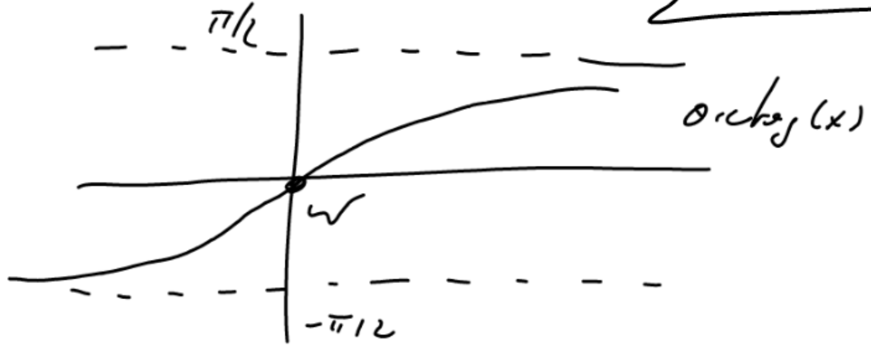
$f''(x) = 0 \iff x = 0$ (Nenner $\neq 0 \; \forall x$)

$\Rightarrow$ Kandidat f. Wendestelle $x = 0$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x\,2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{8x^2 - 2(1+x^2)}{(1+x^2)^3} = \underbrace{\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}}$$

$f'''(0) = -2 \neq 0$

Wendestelle $x = 0$



$\boxed{5}$ (a) FALSCH: $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$

ist diffbar aber nicht $\mathcal{C}^1$

genauer: $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ $(x \neq 0)$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x\sin(1/x) \to 0 \quad (x \to 0) \Rightarrow f'(0) = 0$$

f' nicht stetig, denn $\lim\limits_{0 \neq x \to 0} f'(x) = \lim \Big(\underbrace{2x\sin(1/x)}_{\to 0} - \underbrace{\cos(1/x)}_{\nexists}\Big)$

(b) NEIN, f muß nicht diffbar sein, zB

Konvex, aber $f''(0) \nexists$

$\boxed{2}$ (a) NACHTRAG: $\int \operatorname{arctg}(x)\,dx \overset{\text{Trick}}{=} \int \underset{f'}{1}\, \underset{g}{\operatorname{arctg}(x)}\,dx \overset{\text{P.I.}}{=} x\operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$= x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$