PRÜFUNGSAUSARBEITUNG
8. TERMIN, 2016-05-11

[1] (a) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine reelle Fkt auf einem Intervall. $\xi \in I$ heißt striktes lokales Maximum [Minimum], falls $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I : f(x) < f(\xi)$ $[f(x) > f(\xi)]$.

Eine Fkt $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfkt, falls es eine endliche Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ von $[a,b]$ gibt [d.h. $t_i \in [a,b]$ sodass $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$] und Konstanten $c_j \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le n$ sodass

$$\varphi(t_j) = c_j \quad \forall x \in (t_{j-1}, t_j) \quad (1 \le j \le n)$$

Eine Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) heißt C^k-Funktion, falls sie k-mal stetig diffbar ist [d.h. k-mal diffbar & $f^{(k)}$ stetig].

[1] (b) MWS: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig & diffbar auf (a,b). Dann $\exists \xi \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

[1] (c) HSDI: Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und seien $a, b \in I$. Dann gilt

(i) Die Funktion $F: I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist stetig diffbar und es gilt $F' = f$.

(ii) Sei F eine beliebige Stammfkt von f, dann gilt $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Beweis. (i) f stetig $\Rightarrow$ f R-intbar und F ist definiert. Weiters gilt $(0 \neq h,\ x+h \in I)$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

MWS Int.

$\Longrightarrow$ $\exists\, \xi_h \in [x, x+h]$ (bzw $[x+h, x]$) mit

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h)\cdot h$$

Falls $h \to 0$, dann geht auch ξ_h gegen x, denn $|x-\xi_h| \leq |x-(x+h)| = |h|$ und somit

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi_h) \underset{f \text{ stetig}}{\longrightarrow} f(x) \implies F' = f \text{ und}$$

damit $F \in \mathcal{C}^1$

Die Stetigkeit wurde 2mal verwendet:

1.) um überhaupt zu sehen, dass f R-intbar und somit F definiert ist und

2) um zu sehen, dass $f(\xi_h) \to f(x)$ $(\xi_h \to x)$.

(ii) Sei $G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ wie in (i).

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ G ist Stammfunktion von f

$\Rightarrow$ Jede Stammfkt von f ist von der Form
$F = G + c \quad (c \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt$$
$$= \int_a^b f(t)\,dt.$$

$\square$

$\boxed{2}$ (a) Die Aussage bedeutet, dass das Inkrement (Zunahme) von f bei ξ definiert als $\varphi(h) = f(\xi+h) - f(\xi)$ bis auf einen Fehler $r(h)$ proportional zu h ist.

Anders ausgedrückt ist das Inkrement bis auf den Fehler durch die lineare Fkt

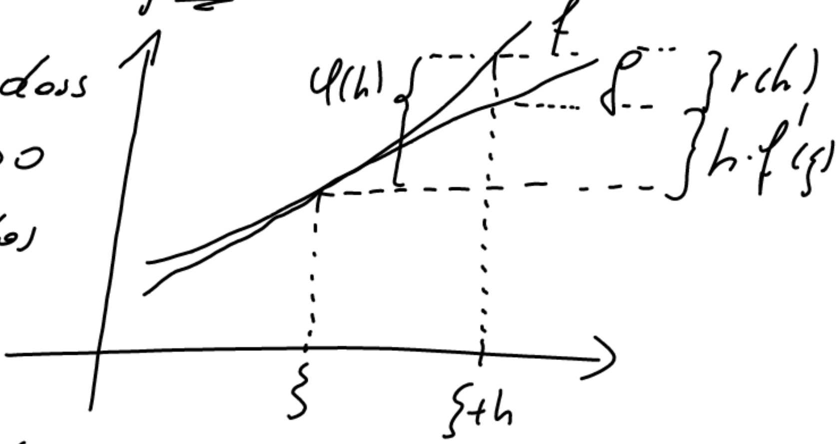
$$h \mapsto f'(\xi) \cdot h$$

gegeben.

Geometrisch bedeutet die Aussage, dass die Tangente an f im Pkt ξ $\quad \rho(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$

nahe ξ die Fkt f gut approximiert.

„Gut" bedeutet, dass nicht nur $r(h) \to 0$ $(h \to 0)$ – denn das ist für jede Gerade durch $(\xi, f(\xi))$ der Fall,



sondern, dass sogar $\frac{r(h)}{h} \to 0 \quad (h \to 0)$.

$\boxed{12}$ (b) Für die genaue Formulierung siehe 1(b).

Die anschauliche Bedeutung ist, dass f unter obigen Voraussetzungen eine Stelle ξ besitzt an der die Tangente parallel zur Sekante durch a, b ist.

Das ist anschaulich evident: Beginnt f steiler als die Sekante, dann muß sie irgendwann flacher werden und nimmt dazwischen die Steigung der Sekante an; Analog umgekehrt

Anwendungen: • $|f'(x)| \leq C \Rightarrow f(b) - f(a) \leq C(b-a)$
(Wachstumsschranken)

• (Monotonie & Ableitung): $f'(x) \geq 0 \ \forall x \Leftrightarrow f$ mon. wachsend.

$\boxed{13}$ (a)

$$x^x = e^{x \log x}$$

$$(x^x)' = x^x (\log x + 1)$$

$$(x^x)'' = x^x \left((\log x + 1)^2 + 1/x \right)$$

(b) $\int \arctan(x)\,dx = \int \overset{f'}{1} \cdot \overset{g}{\arctan(x)}\,dx \overset{P.I.}{=} x \arctan(x) - \int x \frac{1}{1+x^2} = \underline{x \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2)}$

$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \varphi'/\varphi = \log(1+x^2)$

3 (b) $f(x) = x^3$ ist (strikt) konkav auf $(-\infty, 0]$

(strikt) konvex auf $[0,\infty)$

daher auf $\mathbb{R}$ weder konkav noch konvex

(c) • $f(x) = \sqrt{x}$ diff'bar auf $(0,1]$:

$$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = \frac{\sqrt{\xi+h}-\sqrt{\xi}}{h} = \frac{\xi+h-\xi}{h(\sqrt{\xi+h}+\sqrt{\xi})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\xi+h}+\sqrt{\xi}} \xrightarrow[\sqrt{\ } \text{ stetig}]{} \underline{\underline{1/2\sqrt{\xi}}}$$

$\Rightarrow \underline{\sqrt{x}' = 1/2\sqrt{x} \quad \forall x>0}$

• $\underline{\sqrt{x} \text{ nicht diff'bar in } 0:}$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \to \infty \quad (h \to 0)$$

• $\underline{\sqrt{x} \text{ nicht Lip auf } [0,1]}$:

Ang $\sqrt{x}$ Lip $\Rightarrow \exists C>0: |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq C|x-y| \quad \forall x,y \in [0,1]$

$\Rightarrow \exists C: \left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right| \leq C$

setze $x=0 \Rightarrow \exists C: \frac{\sqrt{y}}{y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \leq C \quad \forall y \in (0,1]$

$\underline{\text{WiD}}$!

$\boxed{4}$ (a) f diffbar in $\xi \Rightarrow f$ stetig in ξ: Sei x nahe ξ, $x \neq \xi$

dann gilt: $$f(x)-f(\xi) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,(x-\xi) \xrightarrow{x\to\xi} f'(\xi)\cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow f(x) \to f(\xi) \quad (x \to \xi) \Rightarrow f$ stetig in ξ

(b) $f(x)=\sqrt{x}$ auf $\{x \mid x \geq 0\}$ ist stetig

(als Potenzfkt $x^{1/2}$) aber nicht

diffbar in $x=0$ siehe $\boxed{3}$ (c)

Anschaulich haben stetige aber nicht diffbare Funktionen Knicke (wie etwa $|x|$ bei 0

)

oder „unendlichen Anstieg" (wie oben

)

(Strenggenommen ist die Sache aber komplizierter zB ist die Weierstraß-Fkt $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin(2^k x)}{3^k}$ stetig auf $\mathbb{R}$ aber nirgends diffbar.)

(c) oBdA sei ξ ein lok. Maximum.

$$\overset{\text{Def}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0: f(\xi) \geq f(x) \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi)$$

$$\overset{f \text{ diffb.}}{\Longrightarrow} \lim_{x \nearrow \xi} \underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\geq 0} = f'(\xi) = \lim_{x \searrow \xi} \underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\leq 0}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq f'(\xi) \leq 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

Falls ξ Randpunkt ist, ist die Aussage falsch; $f(x)=x$ auf $[0,1]$ hat in $x=1$ ein Max, aber $f'(1)=1\neq 0$.

Technisch bricht das Argument im Beweis zusammen, weil nur entweder $x\nearrow\xi$ oder $x\searrow\xi$ möglich ist.

(d) $\left(\log\left(\arccos\left(x^2+4x\right)\right)\right)' =$

$$\arccos(x)' = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

KR, log

$$= \frac{1}{\arccos(x^2+4x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+4x)^2}}(2x+4)$$

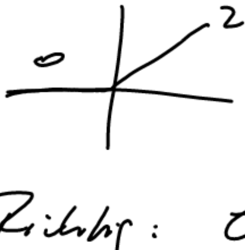
$$= \frac{-2(x+2)}{\arccos(x^2+4x)\sqrt{1-x^2(4+x)^2}}$$

$\boxed{15}$ (a) Falsch; $f\in C^1$ bedeutet, dass $f'\in C^0$, aber deswegen muss f' nicht diffbar sein & daher f'' nicht existieren.

Ein expliziter Gegenbsp. ist $f(x)=x_+^2 = \begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ x^2 & x\geq 0\end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ 2x & x\geq 0\end{cases} \in C^0$ aber

$f''(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 2 & x>0\end{cases}$ in $x=0$ passen Links- u. rechtsseitige Ableitungen nicht zusammen $\Rightarrow f''(0)\ \nexists$



(b) Richtig: $C^1 \Rightarrow$ diffb $\Rightarrow$ stetig $\Rightarrow$ R-intbar.