Blatt 10: Differenzierbarkeit und Ableitung[1], Teil 1

$\boxed{1}$ *Differenzierbarkeit—direkt aus der Definition.*
Zeige—direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit—dass die folgenden Funktionen (überall, d.h. auf ihrem gesamten Definitionsbereich) differenzierbar sind und berechne ihre Ableitung.

(a) (Die Identität als Aufwärmübung) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

(b) (Cosinus, vgl. Vo. $\boxed{3}$ 1.8(iv)) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos(x)$

(c) (Produkt mit einer Zahl) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i(x) = c\,j(x)$, mit $c \in \mathbb{R}$ eine fixe Zahl und $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion (mit Ableitung j')

(d) (Inverse Potenzen) $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-n}$ für $\mathbb{N} \ni n \geq 1$

$\boxed{2}$ *Ableitung der Monome.*

(a) Kombiniere die Ableitung der Potenzen (Vo. $\boxed{3}$ 1.8(ii),(i)) mit Aufgabe 1(c),(d) (bzw. Vo. $\boxed{3}$ 1.16(i)) um zu zeigen, dass

$$f(x) = c\,x^n$$

für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ auf dem jeweiligen Definitionsbereich differenzierbar ist. Gib die Ableitung an.

(b) Gib explizit die Ableitungen für $c = 1$ und $n = -3, -2, -1 - 0, 1, 2, 3$ an. Welcher Exponent tritt bei den Ableitungen nicht auf? Warum?

$\boxed{3}$ *Differenzierbarkeit der Wurzel.*

Wir betrachten die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Zeige—direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit—dass f auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

(b) Zeige—wiederum direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit—dass f in $x = 0$ *nicht* differenzierbar ist.

$\boxed{4}$ *Differenzierbarkeit 1.*
Sind die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Berechne gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f_1(x) = \exp(x)\sin(x)$ (b) $f_2(x) = x^4 \exp(x)$

(c) $f_3(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 7x - 11$

(d) (Polynom, allgemein) $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (n \in \mathbb{N},\ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R})$

[1]Mit diesen Aufgaben beginnen wir uns auf den Stoff der „Analysis in einer Variable für LAK" (Kapitel $\boxed{3}$ §1) zu beziehen.

Roland Steinbauer, Oktober 2012

$\boxed{5}$ $\exp' = \exp$—*über Wald und Wiese.*
In Vo. $\boxed{3}$ 1.8(iv) haben wir gezeigt, dass $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und die bemerkenswerte Eigenschaft besitzt, dass $\exp' = \exp$ gilt.

Zeige, dass dieses Resultat auch hergeleitet werden kann, indem man die Exponentialreihe gliedweise (d.h. Term für Term) differenziert.

Hinweis. Wir werden später in der Vorlesung einen Satz kennenlernen, der diese Vorgehensweise ,,legalisiert". Genauer, eine konvergente Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ $=: f(x)$ darf gliedweise differenziert werden, d.h. es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, x^{n-1} = f'(x)$.

$\boxed{6}$ *Differenzierbarkeit 2.*
Für welche x sind die folgenden Funktionen definiert, wo sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Berechne gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f_1(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ (b) $f_2(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1)$

(c) $f_3(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$ (d) $f_4(x) = x^{-3} + \dfrac{x-1}{x-2}$

$\boxed{7}$ *Iterierte Produkte.*
Seien $f_1, \ldots, f_n$ $(n \in \mathbb{N})$ differenzierbare Funktionen. Zeige induktiv die Regel

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n \;+\; f_1 f_2' f_3 \cdots f_n \;+\; \ldots + f_1 \cdots f_{n-1} f_n'.$$

$\boxed{8}$ *Tangente explizit.*
Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f in dem jeweils angegebenen Punkt P. Fertige eine Skizze an.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $P = (1, 1)$ (b) $f(x) = e^x$, $P = (0, 1)$ (c) $f(x) = \sin(x)$, $P = (0, 0)$

$\boxed{9}$ *Produktregel kreativ.*
Die reellen Funktionen $f, g : (-a, a) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Weiters gelte, dass $f(x)g(x) = x$ für alle $x \in (-a, a)$ und $f(0) = 0$. Zeige, dass dann $g(0) \neq 0$ gelten muss.

Roland Steinbauer, Oktober 2012