Blatt 12: Differenzierbarkeit und Ableitung, Teil 3

1 *Differenzieren 1.*
Berechne die Ableitungen der Funktionen $f_i : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $a > 0$, eine fixe Zahl.

(a) $f_1(x) = a^x$ (b) $f_2(x) = x^a$ (c) $f_3(x) = x^x$
(d) $f_4(x) = x^{(x^x)}$ (e) $f_5(x) = (x^x)^x$ (f) $f_6(x) = x^{(x^a)}$
(g) $f_7(x) = x^{(a^x)}$ (h) $f_8(x) = a^{(x^x)}$ (i) $f_9(x) = a^{(a^a)}$

2 *Bessel'sche Differentialgleichung.*
Zeige, die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ löst die Differentialgleichung

$$f''(x) + \frac{1}{x}\, f'(x) + \Big(1 - \frac{1}{4x^2}\Big)\, f(x) = 0.$$

Anmerkung: Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, die der Bessel'schen Differentialgleichung $f''(x) + 1/x\, f'(x) + (1 - p^2/x^2)f(x) = 0$ der Ordnung p genügen, heißen Zylinderfunktionen der Ordnung p. Sie spielen beim Lösen der Schrödingergleichung in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Und wir haben also gezeigt, dass $\sin(x)/\sqrt{x}$ eine Zylinderfunktion der Ordnung $p = 1/2$ ist.

3 *Glattes Einmünden in die Nullfunktion.*
Gegeben sei die Funktion

$$h(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \le 0. \end{cases}$$

Skizziere den Graphen von h und zeige, dass h auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar (also glatt) ist.

Tipp: Der einzig wunde Punkt ist wieder einmal 0. Für $x \neq 0$ gilt $h^{(k)}(x) = p_k(x)x^{-2k}e^{-1/x}$ (p_k ein Polynom (konkrete Gestalt uninteressant), Induktion!) bzw. $h^{(k)} = 0$. Damit lässt sich nun (wieder mit Induktion) zeigen, dass $h^{(k)}(0)$ existiert und verschwindet, voilà!
Anmerkung: Diese Funktion ist ein explizites Beispiel dafür, dass es für eine (nicht triviale) glatte Funktion möglich ist, beliebig viele Nullstellen zu haben; h mündet bei 0 glatt in die Nullfunktion.

4 *Leibnizregel.*
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ reelle, n-mal differenzierbare Funktionen. Beweise die sog. Leibnizformel für die n-te Ableitung des Produkts

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x).$$

Tipp: Diese Formel hat nicht nur eine frappante Ähnlichkeit zum Binomischen Lehrsatz, sie lässt sich auch analog durch vollständige Induktion nach n beweisen.

5 *Differenzieren 2.* Berechne die Ableitungen auf dem jeweiligen Definitionsbereich.

(a) $f_1(x) = \arcsin(x)$ (b) $f_2(x) = \arcsin(x^2)$ (c) $f_3(x) = \sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x})$
(d) $f_4(x) = \sqrt{\arctan(x^2)}$ (e) $f_5(x) = \arcsin^2(x)$ (f) $f_6(x) = \log(\arccos(x^2 + 4x))$

Roland Steinbauer, Oktober 2012

$\boxed{6}$ *Stetig differenzierbar?*
Gegeben sind die Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Nach Blatt 11, Aufgabe $\boxed{8}$ ist g differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ (sogar mit beschränkter Ableitung g'). Ist g' auch stetig auf $\mathbb{R}$? Skizziere g und g'.

(b) Zeige, dass h auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Ist h auch zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}$? Skizziere h und h'.

Hinweis: Natürlich liegt der Hund wieder in $x = 0$ begraben...
Insgesamt zeigt diese Aufgabe, dass differenzierbare Funktionen nicht stetig differenzierbar (also $\mathcal{C}^1$), sein müssen (sogar falls die Ableitung beschränkt ist) und stetig differenzierbare Funktionen nicht zweimal differenzierbar. Und es ist unschwer zu erkennen, wie man diese Aussage für höhere Ableitungen verallgemeinern kann...

$\boxed{7}$ *Knicke und Sprünge*

(a) Betrachte die sog. Knick-Funktion $x_+ := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x \geq 0. \end{cases}$ Skizziere den Funktionsgraphen. In welchen Punkten ist x_+ stetig, in welchen differenzierbar? Was kann über die einseitigen Ableitungen bei $x = 0$ gesagt werden?

(b) Betrachte die (sog. Heaviside'sche) Sprungfunktion $H(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$
Skizziere den Funktionsgraphen, dann verifiziere die folgenden Aussagen

i. H ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $H'(x) = 0$ und daher dort auch stetig.
ii. H' ist stetig ergänzbar nach $x = 0$.
iii. Trotzdem ist H in $x = 0$ nicht differenzierbar, weil dort sogar unstetig.
iv. Die nicht-Differenzierbarkeit von H in $x = 0$ äußerst sich auch dadurch, dass der Differenzenquotient dort keinen Limes hat.
v. Allerdings existiert die linksseitige Ableitung von H in $x = 0$, die rechtsseitige aber nicht.

$\boxed{8}$ *Geglättete Knicke.*
Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^{n+1} & x \geq 0. \end{cases}$
Zeige, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar aber nicht $(n+1)$-mal differenzierbar ist. Skizziere die Situation für $n = 4$.
Tipp: Der Schlüssel ist hier — wie schon in $\boxed{3}$ — eine Formel für $f^{(k)}(x)$ ($k = 1, 2, \dots n+1$, $x > 0$): $f^{(k)}(x) = (n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)x^{n+1-k}$ (unmittelbar einsichtig oder leichte Induktion). Damit lässt sich zeigen, dass $f^{(k)}(0)$ für $k = 1, 2, \dots n$ existiert und verschwindet und dass $f^{(n+1)}(0)$ nicht existiert.

Roland Steinbauer, Oktober 2012