Blatt 13: Eigenschaften differenzierbarer Funktionen, Teil 1

$\boxed{1}$ *Kurvendiskussion.*
Bestimme für die folgenden Funktionen den (maximal möglichen) Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonieverhalten, lokale Extrema, Bereiche von Konvexität und Wendepunkte sowie Grenzwerte gegen den Rand des Definitionsbereichs bzw. gegen $\pm\infty$. Skizziere den Funktionsgraphen.

$$\text{(a)} \quad x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+x-2} \qquad\qquad \text{(b)} \quad x \mapsto x\,e^{-1/x}$$

$\boxed{2}$ *Zum Satz von Rolle und seinen Voraussetzungen.*
Wie in Vo. $\boxed{3}$ Bem. 2.11 diskutiert, sind die Voraussetzungen des Satzes von Rolle für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, nämlich f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), teilweise redundant und können zu f differenzierbar auf (a,b) und f stetig in a und b umformuliert werden. Diese Voraussetzungen sind gemeinsam mit $f(a) = f(b)$ aber notwendig, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Finde Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f differenzierbar auf (a,b), $f(a) = f(b)$, aber $\nexists\, \xi$ mit $f'(\xi) = 0$.

(b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, aber es gibt kein ξ mit $f'(\xi) = 0$.

(c) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) = f(b)$ aber es gibt kein ξ mit $f'(\xi) = 0$.

$\boxed{3}$ *Dehnungsschranken.*
Beweise die folgende etwas ausgefeiltere Version von Vo. $\boxed{3}$ Kor. 2.14(i):

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Falls es $m, M \in \mathbb{R}$ gibt mit $m \le f'(x) \le M$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt für alle $x_1 \le x_2 \in [a,b]$

$$m(x_2 - x_1) \le f(x_2) - f(x_1) \le M(x_2 - x_1).$$

$\boxed{4}$ *Lokales und globales Maximum.*
Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n\, e^{-x}$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass f an einer einzigen Stelle, nämlich $x = n$ ihr globales Maximum annimmt und dies auch das einzige lokale Maximum von f ist. Bearbeite dazu die folgenden Punkte.

(a) Um dir einen Überblick zu verschaffen, skizziere den Graphen von f (für ein geeignetes n).

(b) Weil $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ (Beweis!) existiert R sodass $f(x) < 1/e$ für alle $x > R$.

(c) Falls daher f ein globales Maximum in $\xi \in \mathbb{R}$ hat, muss $\xi \in [0,R]$ gelten und es gibt tatsächlich ein solches ξ.

Roland Steinbauer, Oktober 2012

(d) ξ muss sogar in $(0, R)$ liegen und daher ist Vo. $\boxed{3}$ Prop. 2.4 anwendbar.

(e) Berechne ξ und zeige, dass es der einzige Punkt mit diesen Eigenschaften ist.

$\boxed{5}$ *Globale Maxima.*
Bestimme alle globalen Maxima der Funktion

$$f(x) = \Big(3 + 4(x-1)^2\Big)\, e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Gibt es auch globale Minima? Warum bzw. warum nicht?
Tipp: Gehe wie in Aufgabe $\boxed{4}$ vor.

$\boxed{6}$ *Kurvendiskussion 2.*
Bestimme für die folgenden Funktionen den (maximal möglichen) Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonieverhalten, lokale Extrema, Bereiche von Konvexität und Wendepunkte sowie Grenzwerte gegen den Rand des Definitionsbereichs bzw. gegen $\pm\infty$. Skizziere den Funktionsgraphen.

(a) $x \mapsto \dfrac{\log(x)}{x}$ (b) $x \mapsto (1+x)\sqrt{1-x^2}$

$\boxed{7}$ *Stetigkeitsbegriffe.*
Diese Aufgabe dient dazu Details der in Vo. $\boxed{3}$ Bem. 2.15(iii) behaupteten Beziehung zwischen den Begriffen Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

$$\text{Lipschitz-stetig} \quad \begin{array}{c}\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{array} \quad \text{glm. stetig} \quad \begin{array}{c}\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{array} \quad \text{stetig}$$

zu diskutieren. Dazu bearbeite folgende Punkte (I ein Intervall):

(a) Zeige, dass jedes Lipschitz-stetige $f : I \to \mathbb{R}$ auch gleichmäßig stetig auf I ist.

(b) Gib ein Beispiel einer Funktion die gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig ist.
Tipp: Auf $[a, b]$ ist jede stetige Funktion auch gleichmäßig stetig, aber sie könnte eine gegen der Rand hin unbeschränkte Ableitung besitzen.

$\boxed{8}$ *Lipschitz-stetige Funktionen explizit.*
Sind folgende Funktionen Lipschitz-stetig? Wenn ja, bestimme eine Dehnungsschranke.

(a) $f_1(x) = \cos(x)$ auf $[0, 2\pi]$

(b) $f_2(x) = \cos(x)$ auf $\mathbb{R}$

(c) $g_1(x) = x^3$ auf $[0, 1]$

(d) $g_2(x) = x^3$ auf $\mathbb{R}$

(d) $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf $[-1, 1]$

Roland Steinbauer, Oktober 2012