Blatt 14: Eigenschaften differenzierbarer Funktionen 2

$\boxed{1}$ *Kurvendiskussion 3.*
Bestimme für die folgenden Funktionen den (maximal möglichen) Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonieverhalten, lokale Extrema, Bereiche von Konvexität und Wendepunkte sowie Grenzwerte gegen den Rand des Definitionsbereichs bzw. gegen $\pm\infty$. Skizziere den Funktionsgraphen.

(a) $x \mapsto x^2\, e^{-1/x^2}$　　　(b) $x \mapsto x^x$

$\boxed{2}$ *Verallgemeinerter Mittelwertsatz.*
Beweise den verallgemeinerten Mittelwertsatz $\boxed{3}$ Lemma 2.27: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit

$$\big(f(b) - f(a)\big)\, g'(\xi) \;=\; \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(\xi).$$

$\boxed{3}$ *Regeln von de l'Hospital, praktisch.*
Berechne:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x}$ $(\alpha > 0)$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} x \log(x)$　　(c) $\displaystyle\lim_{0\neq x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$　　(d) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} x\, e^{1/x}$

Anmerkung: Diese bzw. ganz ähnliche Grenzwerte haben wir schon in $\boxed{2}$ Bsp. 3.8 berechnet. Die Regel von de l'Hospital führt hier aber oft schneller zum Ziel!

$\boxed{4}$ *Bedingungen für Extremstellen.*
Fasse die notwendige ($\boxed{3}$ Prop. 2.4) und die hinreichende ($\boxed{3}$ Kor. 2.19) Bedingung für lokale Extrema aus der Vorlesung zusammen. Gib jeweils ein (neues—soll heißen ein anderes als in der Vorlesung!) Beispiel dafür an, dass die erste Bedingung nicht hinreichend und die zweite nicht notwendig ist.

$\boxed{5}$ *Extrema des Cosinus.*
Bestimme alle lokalen Extrema der Cosinusfunktion.

$\boxed{6}$ *Bedingungen für Wendestellen.*

(a) Nach Vo. $\boxed{3}$ Bem. 2.26 ändert sich in einer Wendestelle das Krümmungsverhalten der Funktion (entweder von konvex auf konkav oder umgekehrt). Leite für dreimal differenzierbare Funktionen eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für Wendestellen (in Analogie zum Fall der Extrema) ab.

(b) Gib jeweils ein Beispiel, das zeigt, dass die notwendige Bedingung nicht hinreichend und die hinreichende nicht notwendig ist.

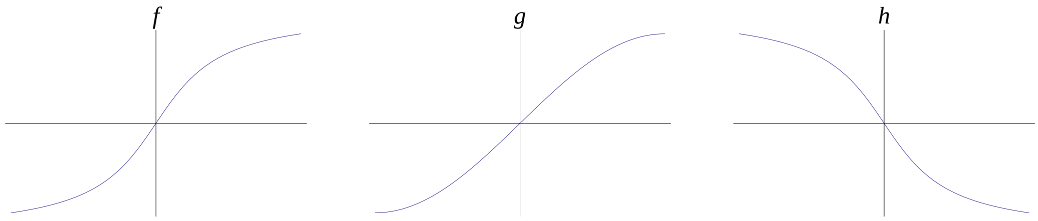
Roland Steinbauer, Oktober 2012

$\boxed{7}$ *Funktionsverlauf gesucht.*
Von einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist folgendes bekannt:

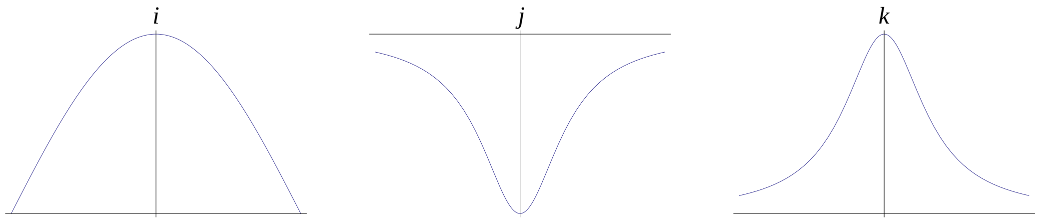
- $f'(x)$ ist negativ auf $(-3, 1)$ und nicht negativ sonst und
- $f''(x)$ ist negativ auf $(-4, -2)$ und nicht negativ sonst.

Fertige eine Skizze an, die einen möglichen Verlauf des Graphen von f auf $[-6, 2]$ darstellt. Zeichne lokale Extrema und Wendestellen ein.

$\boxed{8}$ *Ableitungspuzzle.*
Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g und h.



Welche der Funktionen i, j, k (Graphen siehe unten) ist die erste Ableitung von f, g bzw. h? Warum?



$\boxed{9}$ *Funktionsverlauf möglich?*
Kann es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geben mit

- $f'(x)$ hat Nullstellen genau in den Punkten -3 und 0 und
- $f''(x)$ hat Nullstellen genau in den Punkten 1 und 3?

Tipp. Versuche zuerst mittels einer Skizze eine solche Funktion zu finden. Der Verdacht, dass es so ein f nicht geben kann, läßt sich durch Anwenden des Satzes von Rolle auf f' erhärten...

Roland Steinbauer, Oktober 2012