Blatt 15: Eigenschaften differenzierbarer Funktionen 3

1 *Regeln von de l'Hospital, praktisch 2.*
Berechne ($a, b \in \mathbb{R}$):

(a) $\lim\limits_{0\neq x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ (b) $\lim\limits_{0\neq x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$ (c) $\lim\limits_{0\neq x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x}$

(d) $\lim\limits_{0\neq x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)}$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\log(1+1/x)$ (f) $\lim\limits_{0\neq x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos(ax)}-\sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$

2 *Regeln von de l'Hospital—eine Warnung.*
Berechne $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Tipp: Die Regel von de l'Hospital führt hier nicht zum Ziel (warum?). Hebe e^x heraus.

3 *Der Beweis der de l'Hospital'schen Regeln—Ein Da Capo.*
Der Beweis der Regeln von de l'Hospital in der Vorlesung ist hauptsächlich deswegen technisch und lang, weil er gleichzeitig den Fall von eigentlicher und uneigentlicher Konvergenz abdeckt. Um den „Sympathiewert" des Beweises zu heben, zeigen wir viel direkter und kürzer in dieser Aufgabe die folgende (einfachere) Aussage:

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $g'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Sei $\lim_{x\searrow a} f(x) = 0 = \lim_{x\searrow a} g(x)$, dann gilt

$$\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls letzterer Limes existiert und endlich ist.

Anleitung: Zunächst ist wegen der Monotonie $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Wegen der Konvergenz $\lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \eta \in \mathbb{R}$ liegt $f'(x)/g'(x)$ in jeder ε-Umgebung von η, falls nur x nahe genug bei a liegt. Für zwei solche Punkte $x \neq y$ liefert der verallgemeinerte Mittelwertsatz $|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \eta| < \varepsilon$. Weil wir schon wissen, dass $g(x) \neq 0$ ist, können wir x festhalten und den Limes $y \searrow a$ durchführen und voilà wir sind fertig!

4 *Kurvendiskussion 4.*
Sei $a > 0$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktion $p(x) = x^4 - 4ax^3$. Untersuche p bezüglich Nullstellen, Monotonie und Extrema. Fertige eine Skizze des Funktionsgraphen an.

5 *Zwischenwertsatz der Differentialrechnung.*
Ziel dieser Aufgabe ist es folgenden Satz zu beweisen, der aus naheliegenden Gründen (welchen?) den Namen Zwischenwertsatz oder Nullstellensatz der Differentialrechnung trägt.

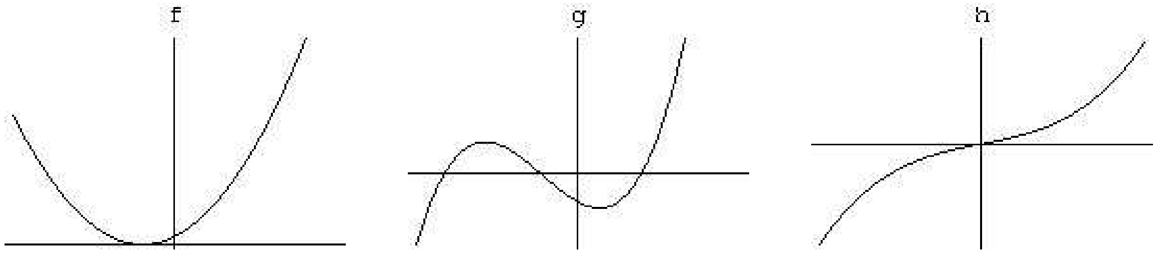
Roland Steinbauer, Oktober 2012

Sei $f[a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) < 0 < f'(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

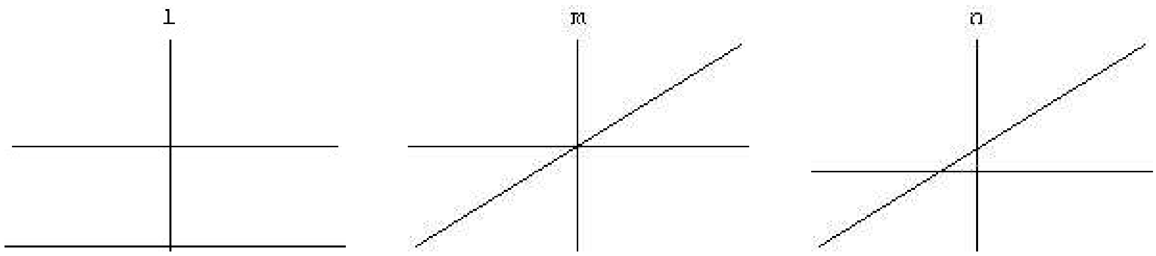
Der Witz dieses Satzes ist es, dass *nicht* $f \in \mathcal{C}^1$ vorausgesetzt werden muss! Er besagt also, dass f' obwohl möglicherweise unstetig, keine Werte ,,überspringen" kann!

Anleitung. f nimmt auf $[a,b]$ in einem Punkt—sagen wir in ξ—ihr Minimum an. Dann muss $\xi \neq a$ gelten, denn sonst wäre $f'(a) \geq 0$ und analog gilt $\xi \neq b$. Jetzt musst du nur mehr Vo. $\boxed{3}$ Prop. 2.4 bemühen...

$\boxed{6}$ *Ableitungspuzzle 2.*
Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g und h.



Welche der Funktionen l, m, n (Graphen siehe unten) ist die zweite Ableitung von f g, bzw. h? Warum?



$\boxed{7}$ *Grenzwerte mittels Mittelwertsatz.*
Der Mittelwertsatz kann verwendet werden, um mit folgendem Trick lästige Grenzwerte von Folgen ($n \to \infty$) zu berechnen: Zunächst bringt man den vorliegenden Ausdruck in die Form eines Differenzenquotienten (etwa in 0). Dann liefert der MWS eine „Zwischenstelle" ξ an der die Ableitung gleich dem Differenzenquotienten ist. Nun führt man im Differenzenquotienten den Limes ($x \to 0$) (wobei x die freie Variable ist) durch und zwingt somit auch die „Zwischenstelle" gegen 0.

Versuche dich in diesem Sinne an folgenden Limiten:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \cos(1/n))$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2 + a^2} - \sqrt[3]{n^2})$