Zum Beweis von (i) benötigen wir ein Resultat, dass vieles von dem verwendet, was wir über stetige Fkt auf kompakten Intervallen wissen [vgl. [2] 2.1].

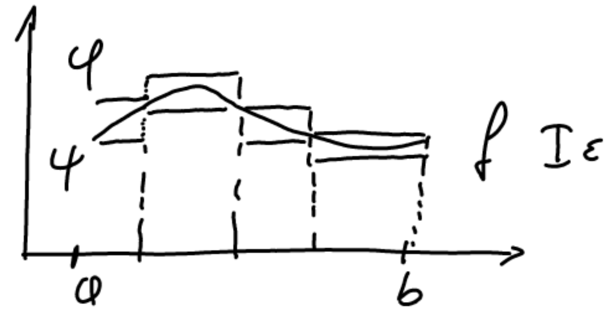
1.13 SATZ (Approximation stetiger Fkt durch Treppenfkt)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$\forall \varepsilon>0 \ \exists\, \varphi,\psi\in T[a,b]$ mit den Eigenschaften

(a) $\psi \le f \le \varphi$

(b) $|\varphi(x)-\psi(x)|\le\varepsilon \quad \forall x\in[a,b]$



Beweis. Sei $\varepsilon>0$.

(1) f ist glm stetig [[2] Thm 7.16]

$\overset{[2]\,2.14}{\Longrightarrow}$ $\exists\,\delta>0$ sodass

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon \quad \forall x,x'\in[a,b] \text{ mit } |x-x'|<\delta \quad (*)$$

(2) (Konstruktion von φ,ψ)

Sei n so groß, dass $\frac{b-a}{n}<\delta$. $(**)$

Wir definieren eine (äquidistante) Zerlegung von $[a,b]$ via

$$t_k := a+k\,\frac{b-a}{n} \qquad (k=0,\dots,n)$$

Es gilt dann $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$, $|t_k-t_{k+1}|\overset{(**)}{<}\delta$ $(***)$

Die Funktionswerte der Treppenfktionen definieren wir wie ($1 \le k \le n$)

$$c_k := \sup\{f(x) \mid t_{k-1} \le x \le t_k\} \qquad (\Delta)$$
$$c_k' := \inf\{f(x) \mid t_{k-1} \le x \le t_k\}.$$

Wir setzen $\varphi(a) := f(a) =: \psi(a)$ und ($1 \le k \le n$)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \varphi(t) := c_k & t_{k-1} < t \le t_k \\ \psi(t) := c_k' & t_{k-1} < t \le t_k \end{array}}$$

(3) Nun gelten (a) nach Konstruktion (vgl. (Δ)) und (b), denn

$\textcircled{12}$ Thm 2.11 $\Longrightarrow \exists\, \xi_k, \xi_k' \in [t_{k-1}, t_k]$ ($1 \le k \le n$):

$$f(\xi_k) = c_k,\ f(\xi_k') = c_k'$$

$$\overset{(***)}{\Longrightarrow} |\xi_k - \xi_k'| < \delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} |c_k - c_k'| < \varepsilon.$$

$\square$

Beweis von 1.12:

(i) Sei $\varepsilon > 0$. $\overset{1.13}{\Longrightarrow} \exists\, \varphi, \psi \in T[a,b]$ mit $\psi \le f \le \varphi$ und $|\varphi(x) - \psi(x)| \le \varepsilon/(b-a)$ $(*)$

Daher gilt

$$0 \le \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b \psi(t)\,dt$$

1.6(iii)

1.6(i),(ii)

$$= \int_a^b (\varphi(t) - \psi(t)) \underset{1.6(iii)}{\overset{(*)}{\le}} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Zerlegung $a = t_0 < t_1 = b$

$\overset{1.11}{\Longrightarrow} f$ ist R-intbar

(ii) Wir beweisen nur den Fall f <u>mon. wachsend</u> (der fallende Fall ist analog).

Wir konstruieren (wie in Bew 1.13, Schritt (2)) eine (äquidistante) Zerlegung von $[a,b]$ via

$$t_k = a + k\,\frac{b-a}{n} \qquad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Zur Konstruktion der Treppenfkt setzen wir

$$\begin{aligned} \psi(t) &= f(t_{k-1}) \\ \varphi(t) &= f(t_k) \end{aligned} \qquad t_{k-1} \le t < t_k$$

$$\psi(b) := f(b) =: \varphi(b)$$

f mon wachsend $\Longrightarrow \psi \le f \le \varphi$

Außerdem gilt

$$0 \underset{1.6(iii)}{\le} \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b \psi(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(f(t_k) - f(t_{k-1})\right)$$

$$\overset{\text{Teleskops.}}{=} \frac{b-a}{n}\left(f(t_n) - f(t_0)\right) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Also gilt $\forall \varepsilon > 0$, dass $0 \le \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b \psi(t)\,dt < \varepsilon$, falls nur n groß genug ist $\overset{1.13}{\Longrightarrow} f$ R-intbar. $\square$