EBENE KURVEN

SE Analysis/Angewandte Mathematik für LAK

Petra Gössinger, Boris Milanovic

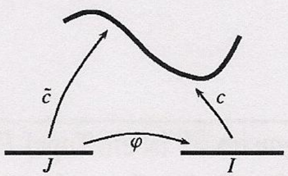
Disposition

- *Krümmung*
- *Umlaufzahl und Umlaufsatz*
- *Konvexität*
- *Scheitel und Vierscheitelsatz*

Grundlegende Definitionen

Definition 2.1.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *parametrisierte Kurve* ist eine unendlich oft differenzierbare Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^n$. Eine parametrisierte Kurve heißt *regulär*, falls ihr Geschwindigkeitsvektor nirgends verschwindet, $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Definition 2.1.7. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Eine *Parametertransformation* von c ist eine bijektive Abbildung $\varphi : J \to I$, wobei $J \subset \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall ist, so dass sowohl φ als auch $\varphi^{-1} : I \to J$ unendlich oft differenzierbar sind. Die parametrisierte Kurve $\tilde{c} = c \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ heißt *Umparametrisierung* von c.



Orientierungserhaltend: $\varphi'(t) > 0$

Orientierungsumkehrend: $\varphi'(t) < 0$

Definition 2.1.9. Eine *Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von regulären parametrisierten Kurven, wobei diese als äquivalent angesehen werden, wenn sie Umparametrisierungen voneinander sind.

Definition 2.1.10. Eine *orientierte Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei diese als äquivalent angesehen werden, wenn sie durch *orientierungserhaltende* Parametertransformationen auseinander hervorgehen.

Definition 2.1.11. Eine *nach Bogenlänge parametrisierte Kurve* ist eine reguläre parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\|\dot{c}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

Definition 2.1.15. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$L[c] := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Länge von c.

Definition 2.1.19. Eine parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt *periodisch mit Periode L*, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $c(t + L) = c(t)$, $L > 0$, und es kein $0 < L' < L$ gibt, so dass ebenfalls $c(t + L') = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Eine Kurve heißt *geschlossen*, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung besitzt.

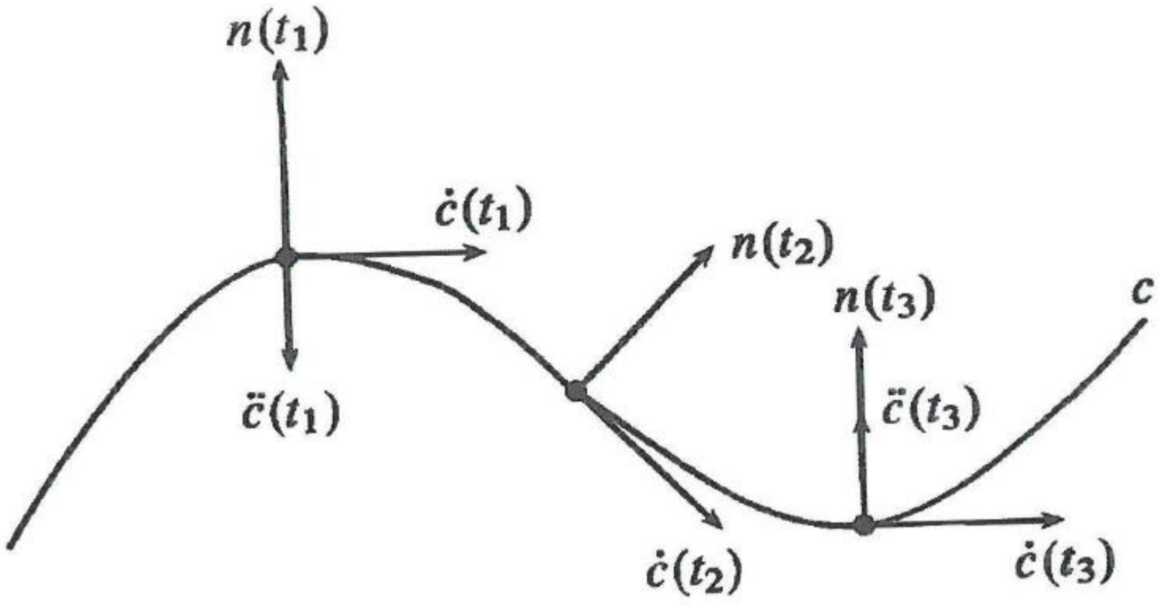
Definition 2.1.20. Eine geschlossene Kurve heisst *einfach geschlossen*, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung c mit Periode L hat, so dass $c|_{[0,L)}$ injektiv ist.

→ebene parametrisierte, reguläre parametrisierte, ebene und ebene orientierte Kurve

$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$

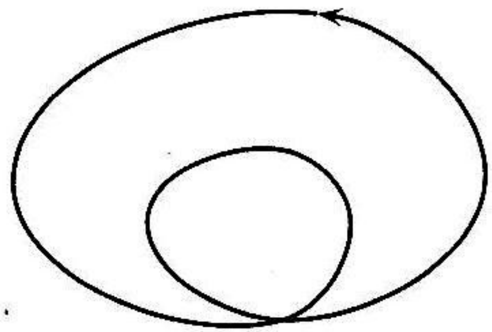
http://www.math.uni-muenster.de/u/urs.hartl/Schueler/LangeMathenacht2012/EbeneKurven.html

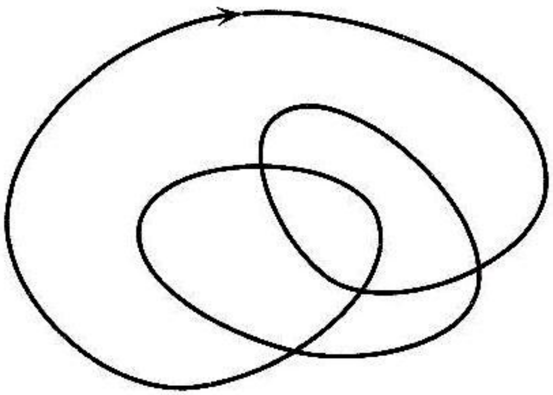
Grundlegende Definitionen

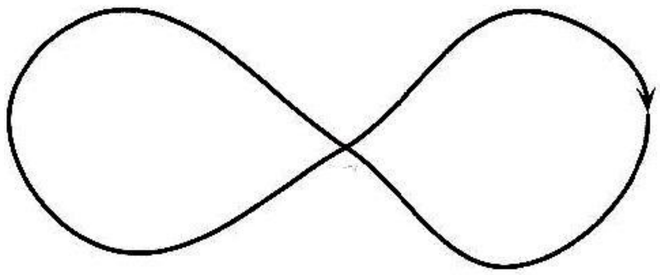


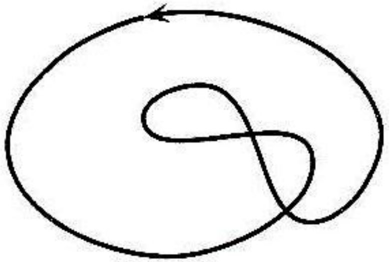
http://www.math.uni-muenster.de/u/urs.hartl/Schueler/LangeMathenacht2012/EbeneKurven.html

BSP (UMLAUFZAHL)









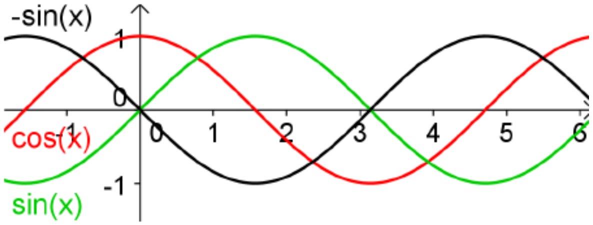
BSP (Umlaufzahl)

$n_\gamma := \frac{1}{2\pi} \cdot (\vartheta(L) - \vartheta(0))$

$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(s)) \\ \sin(\vartheta(s)) \end{pmatrix}$

Beispiel 2.2.18

- Der **Kreis** mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Radius $r > 0$ hat die Bogenlängenparametrisierung $\gamma(s) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right) \\ r \cdot \sin\left(\frac{s}{r}\right) \end{pmatrix}$ mit der Periode $L = 2\pi r$.
- $\gamma'(s) = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{r}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$



- Damit ergibt sich für den Drehwinkel:

$$\vartheta(s) = \frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}$$

- Daraus lässt sich die Umlaufzahl bestimmen:

$$n_\gamma = \frac{1}{2\pi} \cdot (\vartheta(2\pi r) - \vartheta(0)) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

SATZ (UMLAUFZAHL BEI UMPARAMETRISIERUNG)

Satz 2.2.19: Umlaufzahl bei Umparametrisierung

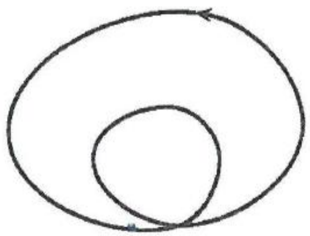
- Wenn $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zwei ebene nach Bogenlänge parametrisierte periodische Kurven mit Periode L sind und γ_2 aus γ_1 durch eine
  - orientierungserhaltende Parametertransfomation entsteht, dann gilt für die Umlaufzahlen: $n_{\gamma_1} = n_{\gamma_2}$
  - orientierungsumkehrende Parametertransfomation entsteht, dann gilt für die Umlaufzahlen: $n_{\gamma_1} = -n_{\gamma_2}$

Satz (Umlaufsatz)

Satz 2.2.24: Umlaufsatz

- Eine einfach geschlossene orientierte ebene Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ hat die Umlaufzahl 1 oder -1.

BSP (Umlaufsatz)



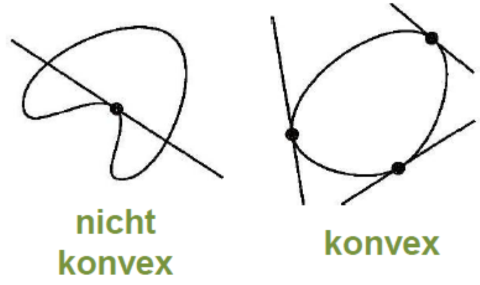
$n_c = 2$

http://www.math.uni-muenster.de/u/urs.hartl/Schueler/LangeMathenacht2012/EbeneKurven.html

Definition (Konvexität)

Definition 2.2.25

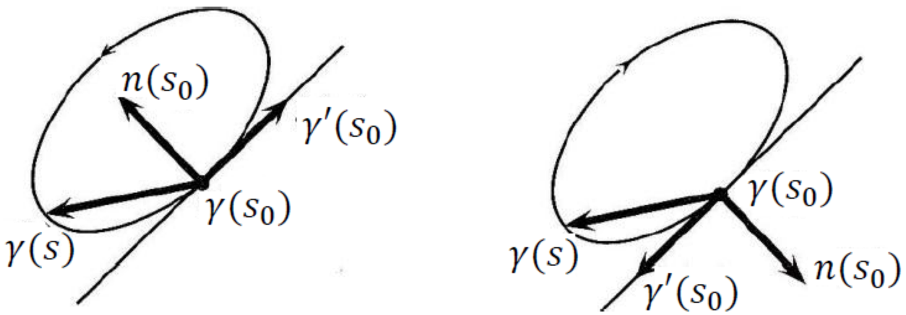
- ▷ Eine ebene Kurve heißt **konvex**, wenn für alle ihre Punkte gilt: Die Kurve liegt ganz auf einer Seite ihrer Tangente durch diesen Punkt.



Bemerkung 2.2.26

- ▷ Ist $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve und n ihr Normalenfeld, dann bedeutet die Tatsache, dass γ konvex ist, für einen Punkt $\gamma(s_0)$ der Kurve folgendes:

$$\forall_{s\in I}\ \langle \gamma(s)-\gamma(s_0), n(s_0)\rangle \geq 0 \ \ \vee\ \ \forall_{s\in I}\ \langle \gamma(s)-\gamma(s_0), n(s_0)\rangle \leq 0$$



SÄTZE (ZUR KONVEXITÄT)

Satz 2.2.28: Konvexitätsbedingung

- Eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ mit Normalenfeld n, ist genau dann konvex, wenn gilt:

$$\forall_{s_0, s \in I} \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), n(s_0) \rangle \geq 0 \ \vee \ \forall_{s_0, s \in I} \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), n(s_0) \rangle \leq 0$$

Satz 2.2.30: Zusammenhang zwischen Konvexität und Krümmung

- Eine nach der Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene ebene Kurve $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit der Krümmung $\kappa: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn gilt:

$$\forall_{s \in \mathbb{R}} \kappa(s) \geq 0 \ \vee \ \forall_{s \in \mathbb{R}} \kappa(s) \leq 0$$

Satz 2.2.30a: Zusammenhang zwischen Konvexität und Krümmung

- Für die Krümmung $\kappa: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer nach der Bogenlänge parametrisierten konvexen (aber nicht notwendigerweise einfach geschlossenen) ebenen Kurve $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\forall_{s \in \mathbb{R}} \kappa(s) \geq 0 \ \vee \ \forall_{s \in \mathbb{R}} \kappa(s) \leq 0$$

SATZ (VIERSCHEITELSATZ)

Satz 2.2.34: Vierscheitelsatz

- Ist $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte konvexe ebene Kurve mit Periode L, dann hat sie mindestens vier Scheitel in $[0, L)$.

HILFSSÄTZE (FÜR DEN VIERSCHEITELSATZ)

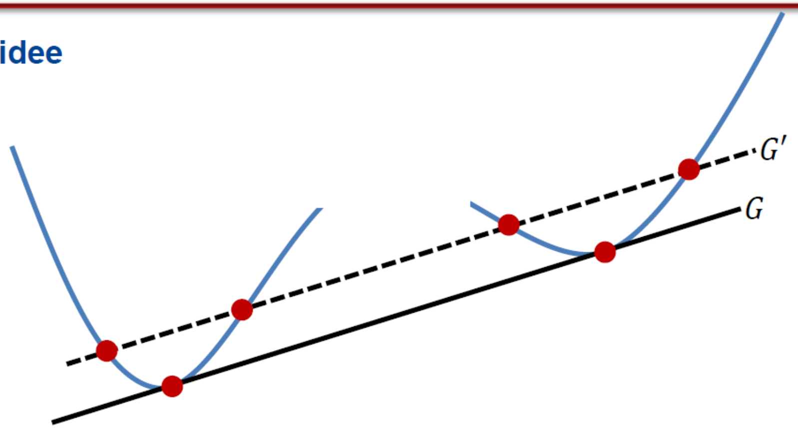
Hilfssatz 2.2.35: Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kurve (1)

- ▷ Schneidet eine Gerade G eine einfach geschlossene konvexe ebene Kurve γ in mehr als zwei Punkten, dann enthält γ ein ganzes Segment von G und hat damit unendlich viele Schnittpunkte mit G.

Hilfssatz 2.2.36: Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kurve (2)

- ▷ Berührt eine Gerade eine einfach geschlossene konvexe ebene Kurve γ in mehr als einem Punkt tangential, dann enthält γ ein ganzes Geradensegment.

- **Beweisidee**



- ▷ Anwendung von Hilfssatz 2.2.35 auf G'.

HILFSSÄTZE (FÜR DEN VIERSCHEITELSATZ)

Hilfssatz 2.2.35: Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kurve (1)

- ▷ Schneidet eine Gerade G eine einfach geschlossene konvexe ebene Kurve γ in mehr als zwei Punkten, dann enthält γ ein ganzes Segment von G und hat damit unendlich viele Schnittpunkte mit G.

Hilfssatz 2.2.36: Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kurve (2)

- ▷ Berührt eine Gerade eine einfach geschlossene konvexe ebene Kurve γ in mehr als einem Punkt tangential, dann enthält γ ein ganzes Geradensegment.

Satz 2.2.11: Frenet-Gleichungen

- ▷ Wenn $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit der Krümmung κ und dem Normalenvektor n ist, dann gilt:

$$(\gamma''(s), n'(s)) = (\gamma'(s), n(s)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}$$


Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!
Noch Fragen?
MEME-GENERATOR.DE