Raumkurven

Definiton: Eine parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ heißt **parametrisierte Raumkurve**. Analog sind Raumkurven, reguläre parametrisierte Raumkurven und orientierte Raumkurven definiert.

Definiton: Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Raumkurve. Sei $t_o \in I$.
Dann heißt

$$v(t_0) := \dot{c}(t_0)$$

der **Geschwindigkeitsvektor** von c in t_0.

Definition: Eine **nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve** ist eine reguläre parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ mit

$$||v(t_0)|| = 1 \;\; \forall t \in I$$

Definition: Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve.
Die Funktion

$$\kappa : I \to \mathbb{R} \;\; \kappa(t) := ||\ddot{c}(t)||$$

heißt die **Krümmung von** c.

Definiton: Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Raumkurve. Sei $t_o \in I$ und $\kappa(t_0) \neq 0$.
Dann heißt

$$n(t_0) := \frac{\ddot{c}(t_0)}{||\ddot{c}(t_0)||}$$

der **Normalenvektor** von c in t_0.

Definiton: Sie $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Raumkurve. Sei $t_o \in I$ und $\kappa(t_0) \neq 0$.
Dann heißt

$$b(t_0) := v(t_0) \times n(t_0)$$

der **Binormalenvektor** von c in t_0.

Definition: Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $\kappa(t) \neq 0$.
Die Funktion

$$\tau : I \to \mathbb{R} \;\; \tau(t) :=< \dot{n}(t), b(t) >$$

heißt die **Torsion oder Windung von** c.

Definition: Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $\kappa(t_0) \neq 0$
Die Orthonormalbasis

$$(v(t_0), n(t_0), b(t_0))$$

heißt **Begleitendes Dreibein von** c in t_0.

Hauptsatz der Raumkurventheorie:
Sei I ein Intervall, seien $\kappa, \tau \ : \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen mit $\kappa > 0$.
Dann existiert eine nach Bogenlänge parametriseirte Raumkurve $c\,:\,I \to \mathbb{R}^3$
mit Krümmung κ und Torsion τ.
Die Eindeutigkeit ist bis auf Dahinterschaltung von Euklidischen Bewegungen gegeben.

Definition: Sei c eine periodische nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit Periode L.
Wir definieren die **Totalkrümmung** von c als:

$$\kappa(c) := \int_0^L \kappa(t)\,dt$$

Definition: Sei c eine periodische parametrisierte Raumkurve mit Periode L.
Sei $e \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor, also $e \in S^2$.
Wir zählen die **lokalen Maxima in Richtung e** durch
$\mu(c,e) := |\{lokale\,Maxima\,in\,[0,L)\,der\,Funktion\,t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ t \mapsto < c(t), e >\}| \quad \in \mathbb{N} \cup \infty$
Wir nennen $\mu(c) := \min_{e \in S^2}\ \mu(c,e)$ die **Brückenzahl** der Kurve c.

Korrolar: Sei c eine geschlossene Raumkurve.
Dann gilt:

$$\kappa(c) \geq 2\pi\mu(c)$$

Satz von Fenchel:
Sei c eine einfach geschlossene Raumkurve.
Dann gilt:

$$\kappa(c) \geq 2\pi$$

Gleichheit gilt genau dann wenn c eine konvexe ebene Kurve ist.

Definition: Eine **Isotopie** des $\mathbb{R}^3$ ist eine stetige Abbildung $\Phi : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
sodass für jedes feste $t \in [0,1]$ die Abbildung ein Homöophismus ist.
Zwei einfach geschlossene Raumkurven c_0 und c_1 heißen **ambient isotop**, falls es eine Isotopie Φ des $\mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\begin{aligned} \Phi(0,x) &= 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^3 \\ \Phi(1, Spur(c_0)) &= Spur(c_1) \end{aligned}$$

Definition: Eine einfach geschlossene Raumkurve heißt **unverknotet** falls sie ambient isotop zu einer Einfach geschlossenen ebenen Kurve ist,
ansonsten heißt sie **verknotet**.

Satz von Fary-Milnor:
Sei c eine einfach geschlossene verknotete Raumkurve. Dann gilt

$$\kappa(c) \geq 4\pi$$