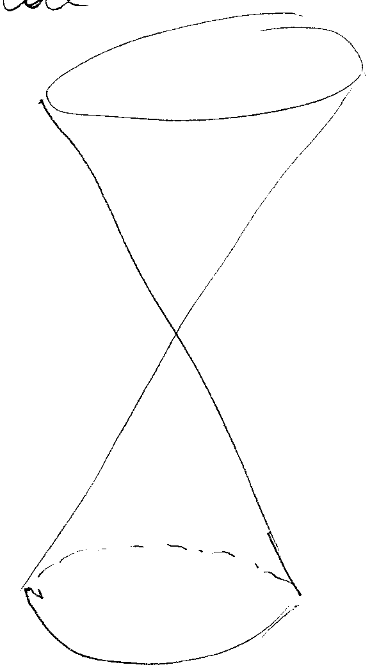
Beispiel: Der Doppelkegel

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2 \right\}$$

ist also definiert als das Nullstellengebilde der Funktion



$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Eine reguläre Fläche?

Betrachten wir den Gradienten:

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$$

Wir sehen: Der Gradient verschwindet nur in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wählen wir $V_0 = \mathbb{R}^3 - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ folgt mit Prop 3.1.6 sofort:

$S \cap V_0 = S - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine reguläre Fläche

Bleibt wie oft die Frage nach dem Ursprung: Was passiert in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Bemerkung: Prop 3.1.6 sagt nichts darüber aus. Es gilt nur „$\Rightarrow$“ nicht „$\Leftrightarrow$“

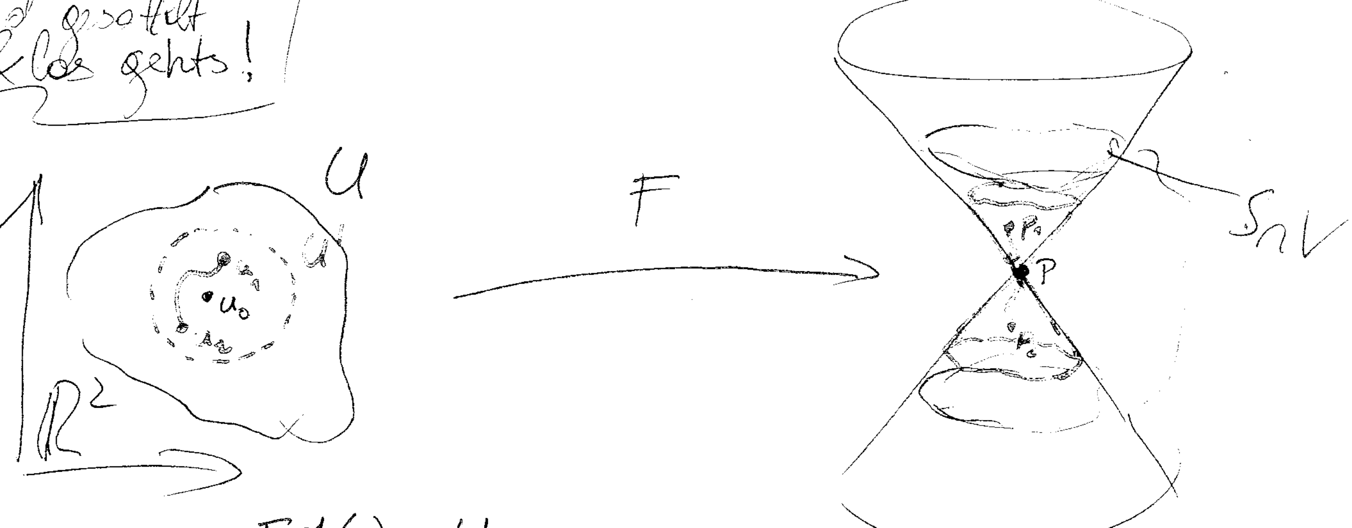
Ang S auch in $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ regulär.

$\Rightarrow \exists$ eine lokale Parametrisierung um $p = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

d.h.: $\exists$ offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^3$
$\exists$ offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ } „TRIPEL"
und $\exists$ eine glatte Abb. $F: U \to V$
sodass gilt.

$F(U) = S \cap V$ und $F: U \to S \cap V$ ist ein Homöomorphismus.

Soweit so gut. Pferd gesattelt & los gehts!



Setze $u_0 := F^{-1}(p) \in U$.

Da U offen können wir eine offene Kreisscheibe $U' \subset U$ mit Mittelpkt u_0 finden

F ist Homöomorphismus $\Rightarrow F(U')$ ist offen in $S \cap V$

$\Rightarrow \exists V'$ offen in V: $F(U') = S \cap V'$ $(\subset S \cap V)$

Nun ist $V' \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von $p = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ ALLE Vektoren mit genügend kleiner Länge sind in V' enthalten.

Jetzt geben wir dem Pferd die Sporn

Insbesondere liegen die Punkte $p_1 = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ mit $z_1 > 0$ und $p_2 = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ mit $z_2 < 0$ in V'!

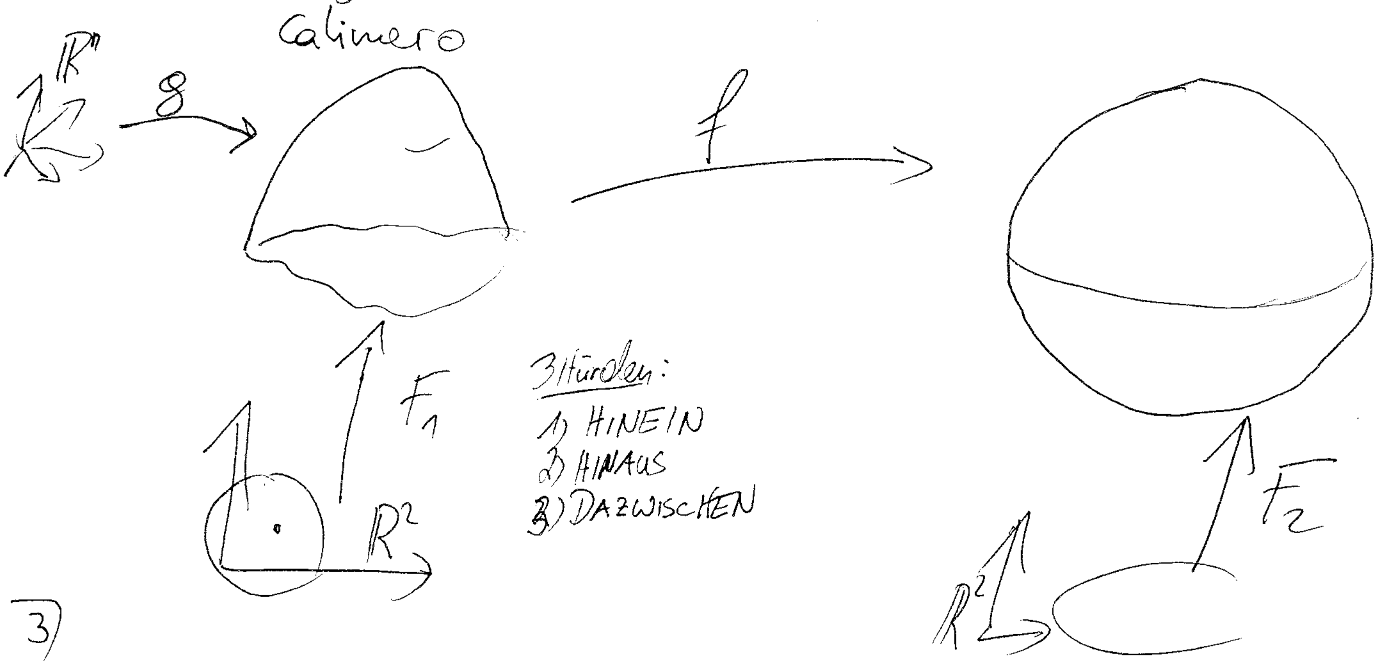
Nun Betrachte: $u_1 := F^{-1}(p_1)$ und $u_2 := F^{-1}(p_2)$. Beide $u_1, u_2 \in U'$

Diese müssen jetzt beide in der Kreisscheibe liegen
Wir können einen stetigen Weg c finden der [Skizze erweitern]
u_1 mit u_2 verbindet ohne durch u_0 zu verlaufen.
Der Bildweg $F \circ c$ der p_1 mit p_2 verbindet MUSS
aber durch $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. [Wegen des Zwischenwertsatzes]

$\lightning$

Motivation

Wann ist eine Fkt glatt?
Ok und wie stellen wir uns das für eine Abb. zwische
zwei regulären Flächen vor?
Diffgu. versagt wenns Blöd kommt.
Also:
Wir wollen wissen was es für eine Abb zwischen zwei
reg. Flächen heißt glatt zu sein.
Wir wissen sehr gut was glatt für eine Fkt
von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ bedeutet. Deshalb zeichnen
wir uns ~~jetzt~~ eine Wanderkarte. Wo wollen wir hin?

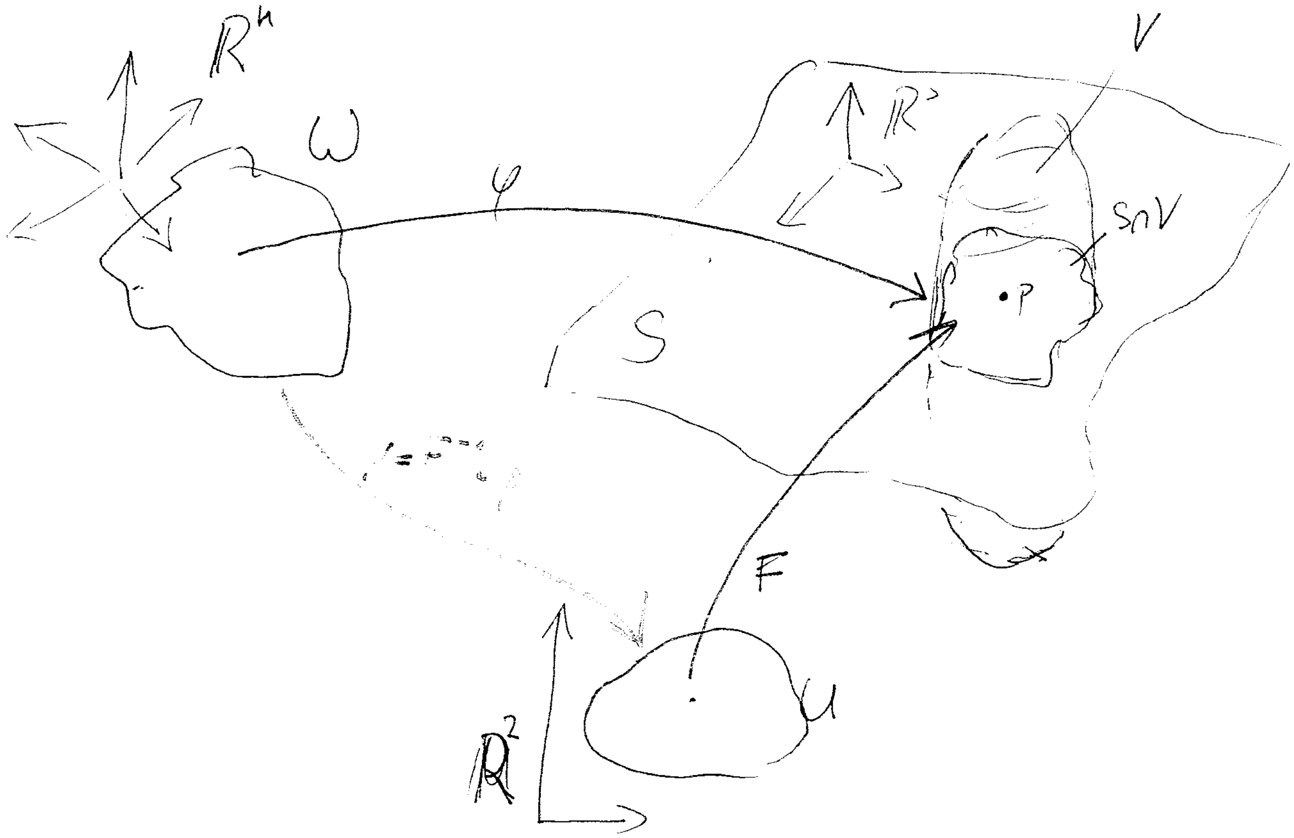


Proposition 3.1.9.

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ eine Abb mit $\varphi(W) \subseteq S \cap V$. Dann ist φ als Abb. glatt genau dann wenn $F^{-1} \circ \varphi : W \to U \subseteq \mathbb{R}^2$ glatt ist.

Bemerkung:

Was haben wir hier für eine Situation?



$$\boxed{\varphi \text{ glatt} \iff \psi \text{ glatt}}$$

In Worten nochmal:

In Diffbarkeitsfragen einer Abb mit Werten in einer regulären Fläche spielt es also keine Rolle ob wir diese Abb als Abb mit Werten in $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^2$ ansehen.

<u>Beweis</u>: Eine Richtung der Prop ist trivial.

„$\Leftarrow$": Wenn ψ glatt ist muss φ als Verknüpfung zweier glatter Abb ($\varphi = F \circ \psi$) ebenfalls glatt sein

„$\Rightarrow$": etwas komplizierter, deshalb aus Zeitgründen!

<u>Beweisidee</u>:

Wir „blasen" U mittels einer Fkt $G: U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ auf.

$$G: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x(u_1, u_2) \\ y(u_1, u_2) \\ z(u_1, u_2) + t \end{pmatrix} \qquad \Big[F: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x(u_1, u_2) \\ y(u_1, u_2) \\ z(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir den Inversensatz als Werkzeug benutzen.

Der entscheidende Punkt wird sein die Fkt!

$G|_{U_1}: U_1 \to V_1$ als <u>Diffeomorphismus</u> zu entlarven

offen in $U \times \mathbb{R}$ — offen in V

bijektive, stetig diffbare Abb. deren Umkehrabb. auch stetig diffbar ist

$W_1 := \varphi^{-1}(V)$ ist offen in W.

Schlussendlich sehen wir, dass $G^{-1} \circ \varphi$ ist glatt als Verkettung zweier glatter Abb

$G^{-1} \circ \varphi = (F^{-1} \circ \varphi, 0) \Rightarrow$ auch $F^{-1} \circ \varphi = \psi$ glatt!

Für den richtigen Beweis betrachten wir einen beliebigen Pkt. $p \in W$ und argumentieren analog.

[Handout]

<u>Bemerkung</u>

Eine wichtige Konsequenz die wir ~~sollte~~ daraus ziehen können ist: Parametertransformationen sind Diffeomorphismen.

Sogar so wichtig, dass wir das Resultat festhalten als:

KOROLLAR 3.1.10.

Sei S eine reg. Fl., seien (U_1, F_1, V_1) & (U_2, F_2, V_2) lokale Parametrisierungen. Dann ist

$$F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

glatt.

Graphisch & Beweis

$= F^{-1}(V_1 \cap V_2)$ $\hat{=}\ \omega$

entspricht: was in Prop 3.1.9

F_1 $\hat{=}\ \varphi$

und (U_2, F_2, V_2) $\hat{=}\ (U, F, V)$

$\Rightarrow$ geschenktes

$\square$

Gauge Theorie? Ein Beispiel:

Betrachten wir wieder unsere Sphäre. Wir wollen die Parametertransformation für den Fall $S = S^2$ berechnen.

Sei dazu:

$F_1 = F_1^+$ und $F_2 = F_2^-$ wie in Bsp von Georg.

Dann ist

$$V_1 \cap V_2 = V_1^+ \cap V_2^- = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x > 0 \text{ und } y < 0 \right\}$$

$$F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y^2 + z^2 < 1,\ y < 0 \right\}$$

$$F_2^{-1}(V_1 \cap V_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + z^2 < 1,\ x > 0 \right\}$$

Für $F_2^{-1} \circ F_1$ ergibt sich

$$F_2^{-1}(F_1(y,z)) = F_2^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt{1-y^2-z^2} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{1-y^2-z^2} \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Wir alle wissen aus Ana 3: Das ist schön \& glatt}}$$

Motivation

Soviel zu HINEIN. Als nächstes HINAUS.

HINAUS: Wir werden also Fkten betrachten die ihren Defbereich auf einer regulären Fläche haben.

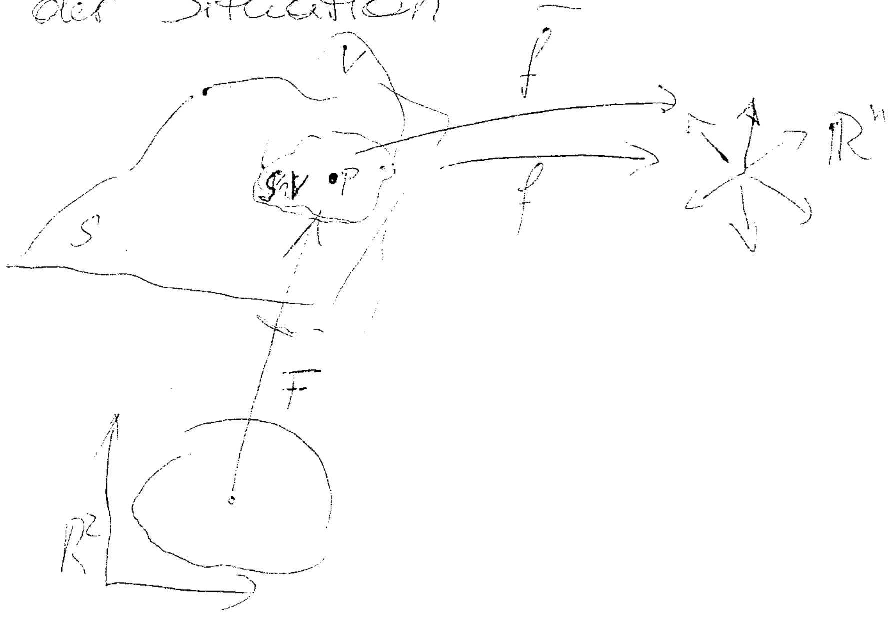
Proposition 3.1.11.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$ und $f: S \to \mathbb{R}^n$ eine Abb. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) Es gibt eine offene Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$ und eine Fortsetzung $\tilde{f}$ von $f|_{S \cap V}$ auf V, die um p glatt ist.
2) Es gibt eine lok. Parametrisierung (U, F, V) mit $p \in V$, sodass $f \circ F: U \to \mathbb{R}^n$ um $F^{-1}(p)$ glatt ist.
3) Für alle lokalen Parametrisierungen (U, F, V) mit $p \in V$, ist $f \circ F: U \to \mathbb{R}^n$ glatt um $F^{-1}(p)$.

Bemerkung

Skizze der Situation



Beweis:

(i) 1) impliziert 3): F ist glatt per Definition
$\tilde{f}$ ist glatt um p lt. Vorraussetzung

$\Rightarrow f \circ F = \tilde{f} \circ F$
ist eine glatte Abb auf einer Umgebung von $F^{-1}(p)$

(ii) Trivialerweise impliziert 3) auch 2)

(iii) 2) impliziert 1)
Wir betrachten wieder unseren Diffeomorphismus aus Bew. 3.1.9.

$$G(u_1, u_2, t) = \begin{pmatrix} x(u_1, u_2) \\ y(u_1, u_2) \\ z(u_1, u_2) + t \end{pmatrix}$$

Wir setzen

$$g(u_1, u_2, t) := f \circ F(u_1, u_2) = f \circ G(u_1, u_2, 0)$$

$\Rightarrow g$ ist glatt nahe $(F^{-1}(p), 0)$

$\Rightarrow$ Wir können die glatte Fortsetzung $\tilde{f}$ definieren als:

$$\tilde{f} = g \circ G^{-1}$$

$\square$

Endlich können wir definieren!

Definition 3.1.12.

Gelten die äquivalenten Bedingungen 1) bis 3) aus Prop. 3.1.11., so nennen wir f glatt nahe p.

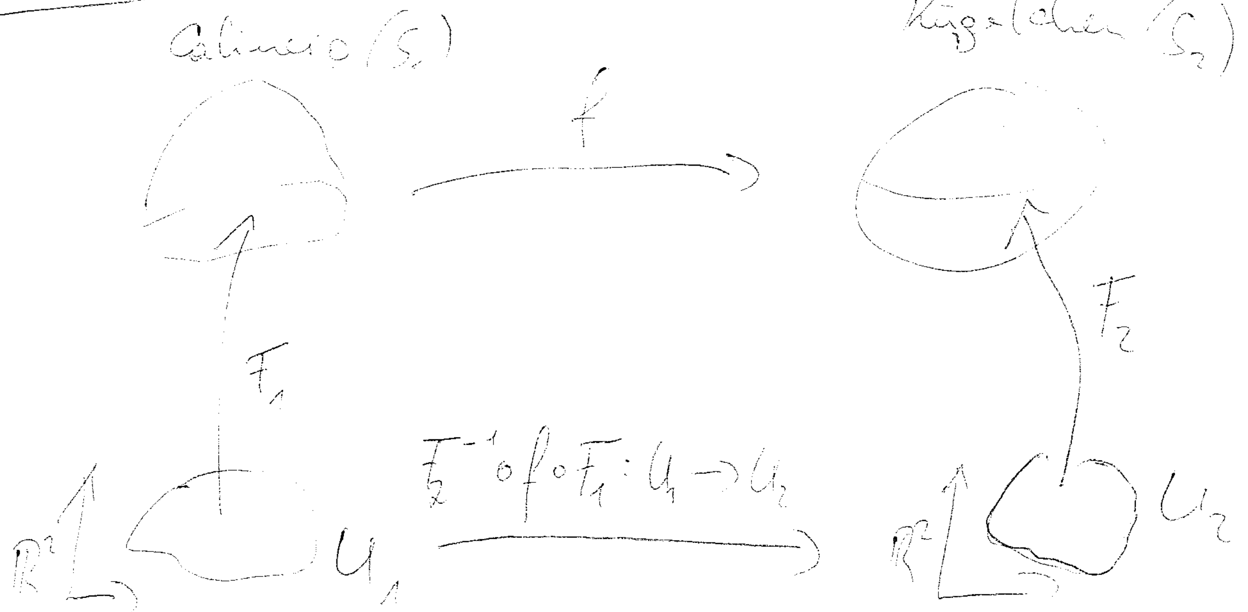
Motivation

Jetzt fehlt nur mehr eine Hürde: DAZWISCHEN.
Wir müssen uns eigentlich nur fragen, ob hier eh nichts „schlimmes" passiert.
Wir betrachten also jetzt eine Fkt mit Def- & Wertebereich auf regulären Flächen.

Definition 3.1.13

Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen.
Wir nennen $f: S_1 \to S_2$ glatt nahe $p \in S_1$, falls es eine lok. Parametrisierung (U_1, F_1, V_1) von S_1 um p und eine lok. Parametrisierung (U_2, F_2, V_2) von S_2 um $f(p)$ gibt, derart dass $F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : F^{-1}(f^{-1}(V_2) \cap V_1) \to U_2$ nahe p glatt ist.

Skizze



Die Definition sagt uns:

$$f \in C^\infty \iff F_2^{-1} \circ f \circ F_1 \; (\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2) \in C^\infty$$

{und das können wir!}

Bemerkung

Das heißt zusammengefasst:

f ist also glatt wenn f ausgedrückt in geeigneten Koordinaten glatt ist.

Die Frage aus der letzten Motivation:

Könnte es passieren dass dieselbe Abb dann ausged. in anderen Koordinaten nicht mehr glatt ist?

Da Parametertransformationen Diffeomorphismen sind lautet die Antwort NEIN!

Beispiel:

Sei $f: S_1 \to S_2$ glatt.

Sind neben (U_i, F_i, V_i) auch $(\tilde{U}_i, \tilde{F}_i, \tilde{V}_i)$ lokale Parametrisierungen von S_i mit $[i \in \{1,2\}]$

$F_2^{-1} \circ f \circ F_1$ glatt ist auch

$$\tilde{F}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{F}_1 = \underbrace{\tilde{F}_2^{-1} \circ F_2}_{\mathcal{C}^\infty} \circ \underbrace{F_2^{-1} \circ f \circ F_1}_{\mathcal{C}^\infty} \circ \underbrace{F_1^{-1} \circ \tilde{F}_1}_{\mathcal{C}^\infty}$$
$\in \mathcal{C}^\infty$

Bemerkung

Das heißt: Um die Diffbarkeit einer Abb zu überprüfen reicht es sie in möglichst geschickt gewählten Koordinaten zu überprüfen.

Eine letzte wichtige <u>Definition 3.1.15.:</u>
Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen.
Eine Abb. $f: S_1 \to S_2$ heißt Diffeomorphismus, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} glatt sind.
Existiert ein solcher Diffeomorphismus $f: S_1 \to S_2$, dann ~~heißen~~ sind die Flächen S_1, S_2 diffeomorph.

<u>Bemerkung</u>
Mit dieser Definition wird etwas sehr wichtiges gesagt: Nämlich wann zwei Flächen mehr oder weniger „gleich" sind. Das ist schön & gut! Weil jetzt haben wir ein Kriterium um Flächen in Äquivalenzklassen einzuteilen!

Vollständiger Beweis 3.1.9

(ii) „$\Leftarrow$": trivial, denn aus $\psi := F^{-1} \circ \varphi$ glatt folgt auch $\varphi = F \circ \psi$ als Verkettung zweier glatter Abb. selbst glatt.

(ii) „$\Rightarrow$": Sei $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ glatt. Sei $p \in W$.
Setze $q := \varphi(p) \in S \cap V$ und $u_0 := F^{-1}(q) \in U$

Betrachten wir das Differential $D_{u_0} F$ von $F(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} x(u_1,u_2) \\ y(u_1,u_2) \\ z(u_1,u_2) \end{pmatrix}$
Dieses hat maximalen Rang
$\Rightarrow$ die 2×2-Matrix $\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u_1,u_2)}(u_0) \right)$ ist ohne Einschränkung invertierbar.

[Bemerkung: falls nicht müssen wir nur entweder die x oder y Koordinate durch die z Koordinate ersetzen]

{Problem: $F^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ Der Inversensatz verlangt aber gleiche Dimension!}

TRICK Wir definieren:

$$G : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad G(u_1,u_2,t) = \begin{pmatrix} x(u_1,u_2) \\ y(u_1,u_2) \\ z(u_1,u_2) + t \end{pmatrix}$$

Wir berechnen wieder das Differential an der Stelle $\begin{pmatrix} u_{0_1} \\ u_{0_2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$D_{(u_{0_1},u_{0_2},0)} G = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1}(u_0) & \frac{\partial x}{\partial u_2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u_1}(u_0) & \frac{\partial y}{\partial u_2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u_1}(u_0) & \frac{\partial z}{\partial u_2}(u_0) & 1 \end{pmatrix}$$

Wegen $\det D_{(u_{0_1},u_{0_2},0)} G \neq 0$ folgt $D_{(u_{0_1},u_{0_2},0)} G$ invertierbar!

Inversensatz $\Longrightarrow$ $\exists$ eine offene Umgebung $U_1 \subset U \times \mathbb{R}$ von $(u_{0_1},u_{0_2},0)$
& $\exists$ offene Umgebung $V_1 \subset V$ von q.
so dass

$G|_{U_1} : U_1 \to V_1$ ein Diffeomorphismus ist

Z1

Setze $W_1 := \varphi^{-1}(V_1)$

Jetzt ist W_1 offene Umgebung von p.

Für $p' \in W_1$ gilt.

$$G^{-1} \circ \varphi(p') = (F^{-1} \circ \varphi(p'), 0)$$

[Weil $F(u_1, u_2) = G(u_1, u_2, 0)$]

$\Rightarrow$ $G^{-1} \circ \varphi$ ist als Verkettung zweier glatter Fkten wieder glatt.

$\Rightarrow$ $F^{-1} \circ \varphi$ glatt auf W_1.

$\Rightarrow$ W_1 ist eine offene Umgebung des beliebigen vorgegebenen Punktes p. #

Z2