Wir wollen Geometrie auf Flächen betreiben. Dazu haben wir bereits die erste Fundamentalform kennengelernt.

Basis der Geometrie

Sie ist ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ und beschreibt die innere Geometrie einer Fläche (also Eigenschaften, die sich durch Längenmessung innerhalb der Fläche ermitteln lassen).

→ Mit den Basisvektoren $X_1 := D_u F(e_1) = \frac{\partial F}{\partial u^1}(u)$

$$X_2 := D_u F(e_2) = \frac{\partial F}{\partial u^2}(u)$$

der lokalen Parametrisierung (U, F, V) von S um p, wobei $u = F^{-1}(p)$.

Dann $g_{ij}(u) := I_p(D_u F(e_i), D_u F(e_j)) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle$

Wir interessieren uns im weiteren Folge für die äußere Geometrie, insbesondere für die Krümmung. D.h. es geht darum, wie die Fläche im umgebenen Raum liegt. Dazu benötigen wir die sogenannte zweite Fundamentalform. Sie ist eine symmetrische Bilinearform und zwar der zuvor eingeführten Weingartenabbildung. Dazu muss die Weingarten-abbildung jedoch selbstadjungiert sein und das wollen wir nun zeigen.

Proposition 3.5.5. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Weingartenabbildung $W_p : T_pS \to T_pS$, $p \in S$. Dann ist W_p selbstadjungiert bzgl. der ersten Fundamentalform.

Beweis: Sei N das Einheitsnormalenfeld von S, das zur Weingarten-Abbildung führt, $W_p = -d_pN$. Wähle eine lokale Parametrisierung (U, F, V) um p und setze $u := F^{-1}(p)$. X_1 und X_2 seien wie vorhin die Basisvektoren von T_pS. Da N überall senkrecht auf S steht, gilt $\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), N(F(u+te_j)) \right\rangle \equiv 0$. Wir differenzieren

Kurve in Tangentialebene

diese Gleichung nun nach t.

$$0 = \frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u+te_j),\ N(F(u+te_j))\right\rangle\Big|_{t=0}$$

$d_p f(x) := \frac{d}{dt}(f\circ c)\big|_{t=0}$ ②

$c(0)=p,\ \dot c(0)=X$

Kurve

$t=0$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u^i}(u+te_j)\Big|_{t=0},\ N(p)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u),\ d_pN\circ D_uF(e_j)\right\rangle$$

Richtungsableitung nach e_j; mit $\frac{\partial}{\partial u^j}$ bezeichnet $\left(D_v f(x) = \frac{d}{dt} f(x+tv)\right)$

$$= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u),\ N(p)\right\rangle + \langle X_i,\ -W_p(X_j)\rangle$$

Also gilt
$$I_p(X_i, W_p(X_j)) = \langle X_i, W_p(X_j)\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u),\ N(p)\right\rangle \qquad (3.3)$$

Nach dem Satz von Schwarz können die zweiten partiellen Ableitungen von F vertauscht werden und wir erhalten

$$I_p(X_i, W_p(X_j)) = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u),\ N(p)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u),\ N(p)\right\rangle$$

I_p symmetrisch

$$= I_p(X_j, W_p(X_i)) = I_p(W_p(X_i), X_j)$$

Zwei Vektoren $X, Y \in T_pS$ lassen sich als Linearkombination von X_1 und X_2 schreiben. Aufgrund der Bilinearität von I und der Linearität von W_p gilt $I_p(X, W_p(Y)) = I_p(W_p(X), Y)$, d.h. W_p ist selbstadjungiert bzgl. I.

$\square$

Damit gibt es nun eine Bilinearform zur Weingartenabbildung!

Definition 3.5.6. Die zur Weingarten-Abbildung W_p gehörige Bilinearform heißt zweite Fundamentalform der Fläche S im Punkt p:

$$II_p(X,Y) = I_p(W_p(X), Y), \quad X, Y \in T_pS$$

mit II_p kann man besser arbeiten als mit W_p

Um die zweite Fundamentalform konkret berechnen zu können, drücken wir sie wie die erste Fundamentalform in lokale Koordinaten aus.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$. Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S um p. Wir setzen $u := F^{-1}(p)$. Weiters seien die Basisvektoren $D_u F(e_1)$ und $D_u F(e_2)$.

Wir definieren $$h_{ij}(u) := \mathrm{II}_p(D_u F(e_i), D_u F(e_j))$$
$$= I_p(W_p(D_u F(e_i)), D_u F(e_j)) \overset{(3.3)}{=} \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p) \right\rangle \quad i,j = 1,2$$

Die Matrix $(h_{ij}(u))_{i,j=1,2}$ ist symmetrisch, d.h. II ist symmetrisch.

Die Weingartenabbildung und die beiden Fundamentalformen hängen eng zusammen. Man kann deshalb die zugehörigen Matrizen auseinander berechnen. Mit $W_p(D_u F(e_i)) =: \sum_{j=1}^{2} w_i^j(u) D_u F(e_j)$ kann man zeigen:
$$h_{ij}(u) = \sum_{k=1}^{2} w_i^k(u)\, g_{kj}(u)$$
$$w_i^j(u) = \sum_{k=1}^{2} h_{ik}(u)\, g^{kj}(u) = w_i^j(u)$$

Wir kommen jetzt zum zentralen Begriff der Flächentheorie und der Differentialgeometrie, dem der Krümmung. Mithilfe der beiden Fundamentalformen können wir nun diesen Begriff erfassen. Es gibt mehrere Konzepte von Krümmung von Flächen und wir beginnen mit der Normalkrümmung.

Intuitiv kann man sich Krümmung als den Faktor (Maß) vorstellen um den sich die Normalenvektoren ändern, wenn man auf der Fläche geht (in Ebene $\equiv 0$)

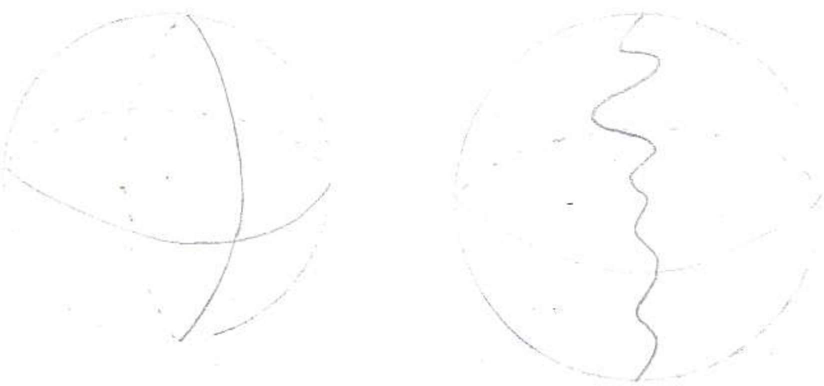
Stellen wir uns dazu folgende Situation vor. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld N, $p \in S$.
Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$. Aufgefasst als Raumkurve in $\mathbb{R}^3$ hat c in 0 die Krümmung $\varkappa(0)$, die im Fall $\varkappa(0) \neq 0$ durch $\ddot{c}(0) = \varkappa(0) \cdot n(0)$ gegeben ist, wobei n der Normalenvektor an c ist.

Wir kennen also bereits die Krümmung einer Raumkurve. Nun interessieren wir uns aber für die Krümmung einer Fläche. Die Schlüsselidee ist jene, dass man die Krümmung von c in zwei Teile zerlegt

① Krümmung von c innerhalb von S (freiwillig) $\to$ geodätische Krümmung von c in S; innere Geometrie von S (→ später!)

② Krümmung von c, die dadurch entsteht, dass S in $\mathbb{R}^3$ gekrümmt ist (unfreiwillig) $\to$ Normalkrümmung von S im $\mathbb{R}^3$; äußere Geometrie von S.

Geodäte



Wir zerlegen dazu $n(0)$ in den Teil tangential an S und denjenigen senkrecht zu S:

freiwillig / unfreiwillig / ohne diesen würde c von S abweichen "entfliehen"

$$n(0) = n(0)^{tang} + n(0)^{senk}$$

Projektion

wobei $n(0)^{senk} = \langle n(0), N(p) \rangle N(p)$

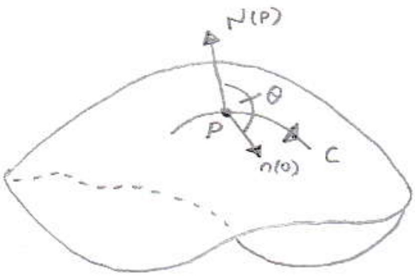
entspricht ① (später) / entspricht ②, müssen wir zur Definition

Damit folgt $\ddot{c}(0) = \varkappa(0) \cdot n(0) = \varkappa(0) \cdot n(0)^{tang} + \varkappa(0) \cdot \langle n(0), N(p) \rangle N(p)$

Definition. $\varkappa_{nor} := \langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle = \begin{cases} \varkappa(0) \cdot \langle n(0), N(p) \rangle, & \varkappa(0) \neq 0 \\ 0 & , \varkappa(0) = 0 \end{cases}$

$n(t)$ ist nur definiert für $\ddot{c}(t) \neq 0$, $\varkappa(t) \neq 0$

Wir nennen $\varkappa_{nor}$ die Normalkrümmung von S im Punkt p in Richtung $\dot{c}(0)$



Falls $\varkappa(0) \neq 0$, dann bezeichnet Θ den Winkel zwischen $N(p)$ und $n(0)$.

Dann gilt $\varkappa_{nor} = \varkappa(0) \cdot \cos \Theta$ und insbesondere $|\varkappa_{nor}| \leq \varkappa(0)$

normiert!!

Das ist insofern klar, als dass die Krümmung von c innerhalb von S verloren geht!

Die Definition hat ein Problem. Wir benötigen die Kurve c. Das wirft die Frage auf, ob $\varkappa_{nor}$ überhaupt eine Eigenschaft der Fläche S (und nicht etwa von c) ist. Dem ist so, wie der nächste Satz zeigt. Es gibt eine Möglichkeit an $\varkappa_{nor}$ zu berechnen, ohne c zu verwenden. Der Schlüssel dazu ist es, sich zu erinnern, dass T_pS ja aus Tangentialvektoren von Kurvenstücken durch p besteht.