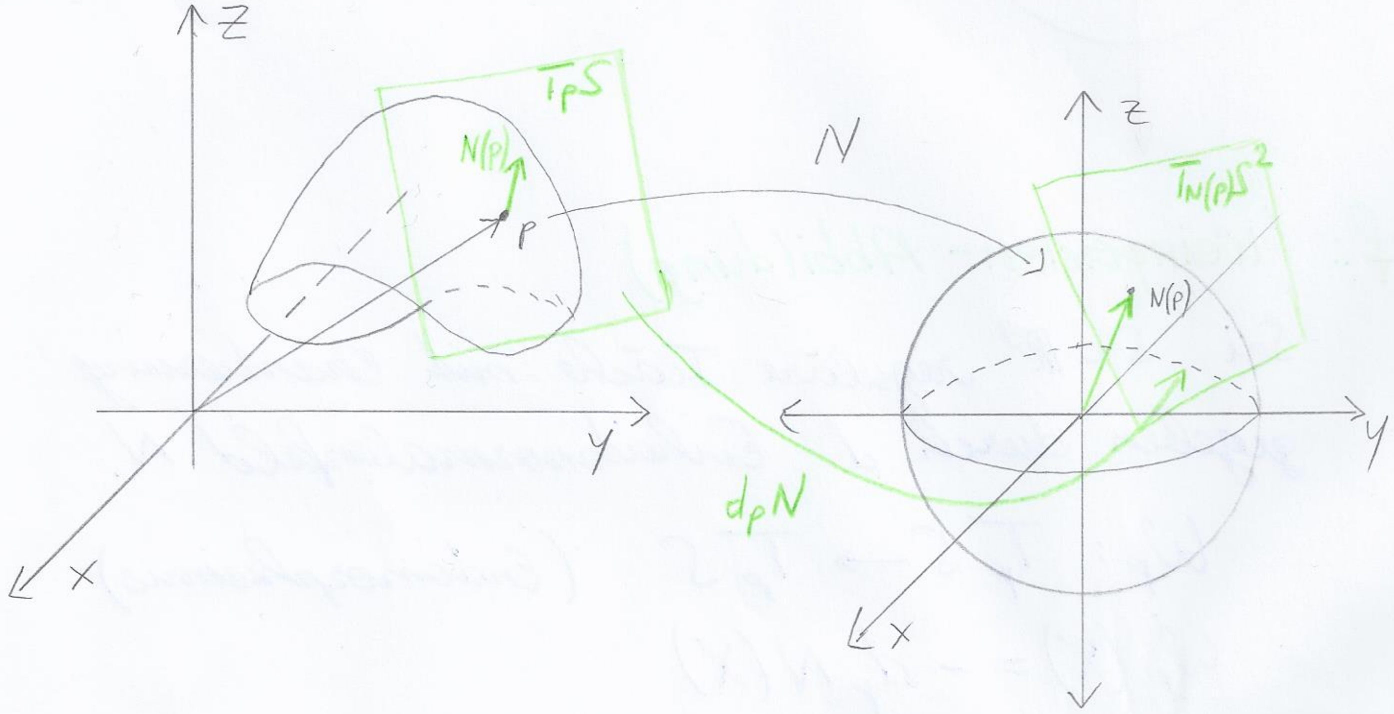
Die 2. Fundamentalform

$S \subset \mathbb{R}^3$ orientierbare reguläre Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld N.

Gauß-Abb.: $N: S \to S^2$



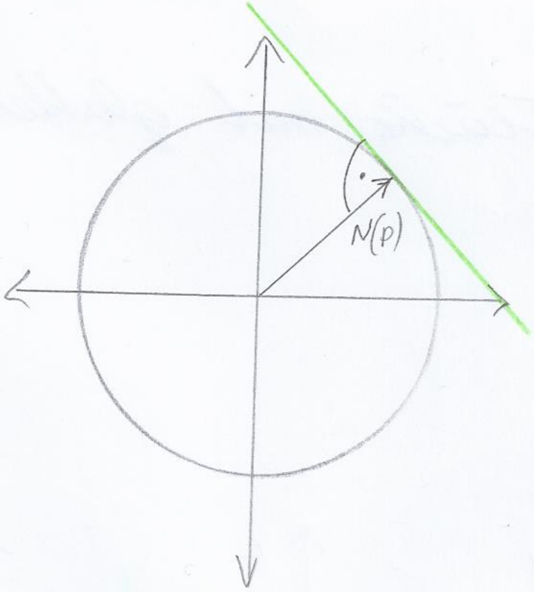
Interesse: Änderung des Normalenvektors bei infinitesimaler Änderung der Position auf S.
(Für Krümmungen notwendig!)

Sei $p \in S$. $\quad d_pN: T_pS \to T_{N(p)}S^2$ (Differential)

mit $d_pN(X) = \frac{d}{dt}(N \circ c)\big|_{t=0}$, wobei

c glatte parametrisierte Kurve:

$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = X$



$$\underline{\underline{T_{N(p)}S^2}} = N(p)^{\perp} = \underline{\underline{T_pS}}$$

Def.: (Weingarten-Abbildung)

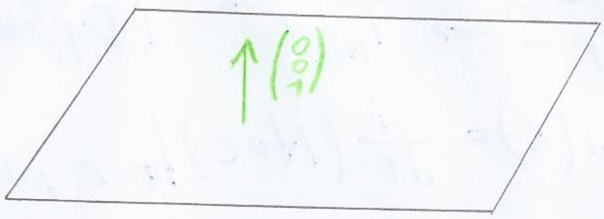
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche mit Orientierung gegeben durch d. Einheitsnormalenfeld N.

$W_p : T_pS \to T_pS$ (Endomorphismus)

$W_p(X) = -d_pN(X)$

Bsp.: (x-y-Ebene)

$S = \{(x,y,0)^T \mid x,y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow N(x,y,z) = (0,0,1)^T$



Intuitiv: $W_p = 0 \ \forall p \in S$

Formal: $W_p(X) = -\frac{d}{dt}(N \circ c)\big|_{t=0} = -\frac{d}{dt}N = -\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$

Bsp.: (Einheitssphäre)

$$S = S^2 \Rightarrow N(p) = p \quad \text{(äußeres Einheitsnormalenfeld)}$$

$$W_p(X) = -\frac{d}{dt}(N \circ c)\big|_{t=0} = -\frac{d}{dt} N(c(t))\big|_{t=0} =$$

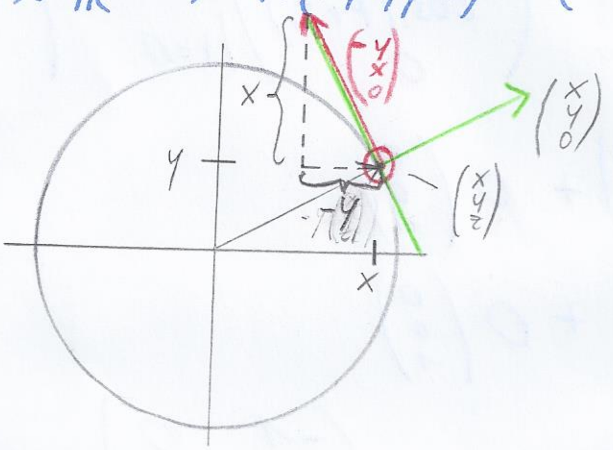
$$= -\frac{d}{dt} c(t)\big|_{t=0} = -\dot{c}(t)\big|_{t=0} = -\dot{c}(0) =$$

$$= -X$$

$$\Rightarrow W_p = -\mathrm{Id} = -\mathbb{1} \quad \text{(Einheitsmatrix)}$$

Bsp.: (Zylinder)

$$S = S^1 \times \mathbb{R} \Rightarrow N(x,y,z) = (x,y,0)^T$$



$$T_pS = \left[\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$W_p\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{d}{dt} N \circ c\,\big|_{t=0} = -\frac{d}{dt} N\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+t \end{pmatrix}\Big|_{t=0} =$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+t \end{pmatrix}, \quad c(0) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \dot{c}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_p\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} = -\frac{d}{dt}N\begin{pmatrix}\cos(t+t_0)\\\sin(t+t_0)\\z\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} =$$

⌈ Wähle $t_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $(\cos t_0, \sin t_0) = (x, y)$ ⌉

$$c(t) := \begin{pmatrix}\cos(t+t_0)\\\sin(t+t_0)\\z\end{pmatrix}, \quad c(0) = \begin{pmatrix}\cos(t_0)\\\sin(t_0)\\z\end{pmatrix}$$

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix}-\sin(t+t_0)\\\cos(t+t_0)\\z\end{pmatrix}, \quad \dot{c}(0) = \begin{pmatrix}-\sin(t_0)\\\cos(t_0)\\z\end{pmatrix}$$

⌊ ⌋

$$= -\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\cos(t+t_0)\\\sin(t+t_0)\\0\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = -\begin{pmatrix}-\sin(t+t_0)\\\cos(t+t_0)\\0\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = -\begin{pmatrix}-\sin(t_0)\\\cos(t_0)\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega_p\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\omega_p\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Matrixdarstellung: $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

Satz von Meusnier

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Einheitsnormalenfeld N und 2. Fund. form II. Sei $p \in S$, $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ eine nach BL param. Kurve mit $c(0) = p$. Dann gilt für die Normalkrümmung κ_{nor} von c:

$$\kappa_{nor} = \mathrm{II}(\dot{c}(0), \dot{c}(0))$$

Insbes. haben alle nach BL param. Kurven in S durch p mit demselben Tangentialvektor dieselbe Normalkrümmung.

Beweis: c verläuft in S

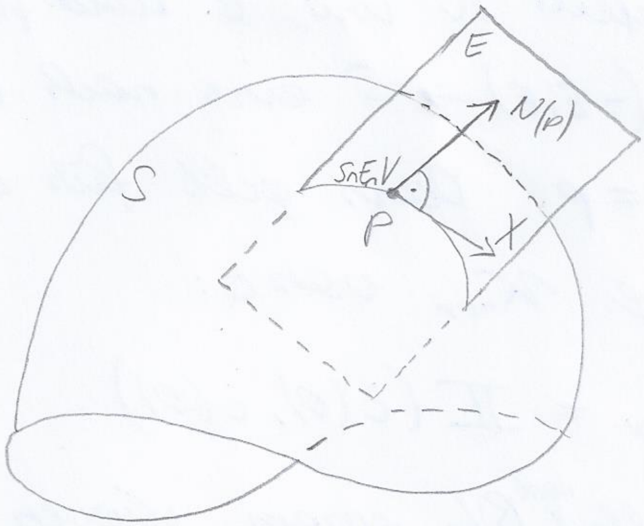
$$\Rightarrow \langle N(c(t)), \dot{c}(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \langle N(c(t)), \dot{c}(t) \rangle \Big|_{t=0} \\
&= \left\langle \frac{d}{dt} N(c(t)) \Big|_{t=0}, \dot{c}(0) \right\rangle + \langle N(c(0)), \ddot{c}(0) \rangle \\
&= \langle d_p N(\dot{c}(0)), \dot{c}(0) \rangle + \langle N(p), \ddot{c}(0) \rangle \\
&= \langle -W_p(\dot{c}(0)), \dot{c}(0) \rangle + \kappa_{nor} \\
&= -\mathrm{II}(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) + \kappa_{nor}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{II}(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) = \kappa_{nor}$$

q. e. d.

$S \subset \mathbb{R}^3$ orientierbare reguläre Fläche, N Einheitsnorm.-feld
$p \in S$, $X \in T_pS$ mit Länge 1, V Umg von p in $\mathbb{R}^3$



Nach Satz v. Meusnier kann man zur Berechnung der Normalkrümmung $\mathrm{II}(X,X)$ die nach BL param. Kurve c verwenden, die $S \cap E \cap V$ beschreibt.

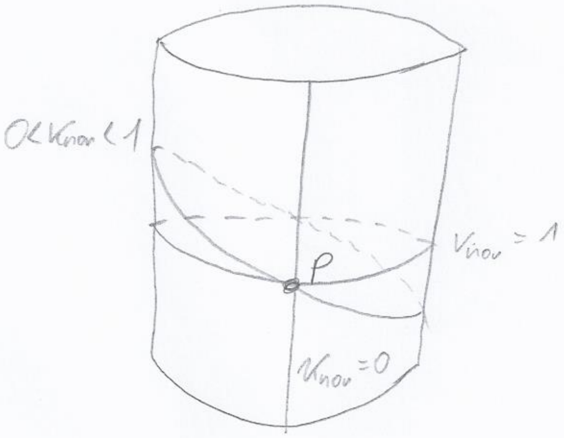
$\Rightarrow$ c kann als ebene Kurve aufgefasst werden mit Kurvennormalenvektor $n(0) = \pm N(p)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{II}(X,X) = \pm \kappa(0) = \kappa_{nor}$

(κ Krümmung von c als ebene Kurve)

Bsp.: (Zylinder)

$S = S^1 \times \mathbb{R}$, $p \in S$



Kreis: $c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t+t_0) \\ \sin(t+t_0) \end{pmatrix}$

$\ddot{c}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t+t_0) \\ -\sin(t+t_0) \end{pmatrix}$

$\ddot{c}(t) = \kappa(0) \cdot n(t)$

$n(t) := \begin{pmatrix} -\cos(t+t_0) \\ -\sin(t+t_0) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \kappa(0) = 1$

$W_p : T_pS \to T_pS$ selbstadj $\Rightarrow \exists X_1, X_2 :$ X_1, X_2 bilden ONB von T_pS aus EV v. W_p.

$\Rightarrow W_p(X_i) = \kappa_i \cdot X_i$, $i = 1, 2$