Def. 3.6.3

von Weingartenabb. Fläche

Die Eigenwerte κ_1 und κ_2 heißen Hauptkrümmungen von S im Punkt p.

Die dazugehörigen Eigenvektoren $\pm X_1$ und $\pm X_2$ heißen Hauptkrümmungsrichtungen.

- Eigenschaft:
  - Eigenwerte von Weingartenabbildung
  - Stimmen die beiden Hauptkrümmungen überein, so ist jede Tangentialrichtung Hauptkrümmungsrichtung. Andernfalls gibt es zu jeder der beiden Hauptkrümmungen genau eine Hauptkrümmungsrichtung. Die beiden sind zueinander senkrecht. (im rechten Winkel)

Sofern nichts anderes gesagt wird, verwenden wir die Konvention $\kappa_1 \leq \kappa_2$. Einen beliebigen Einheitsvektor $X \in T_pS$ (Tangentialebene) können wir in der Basis X_1 und X_2 ausdrücken durch

$$X = \cos(\varphi)\cdot X_1 + \sin(\varphi)\cdot X_2$$

für geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen in die zweite Fundamentalform erhält man die Euler-Formel für die Normalkrümmung in Richtung X:

$(*)\ II_p(X,Y) = I_p(W_p(X),Y) \quad X,Y \in T_pS$

$(**)\ I_p(X,Y) = \langle X,Y\rangle \quad X,Y \in T_pS$

$$II_p(\cos(\varphi)\cdot X_1 + \sin(\varphi)\cdot X_2,\ \cos(\varphi)\cdot X_1 + \sin(\varphi)\cdot X_2)$$

$$\overset{(*)}{=} I_p\big(W_p(\cos(\varphi)\cdot X_1 + \sin(\varphi)\cdot X_2),\ \cos(\varphi)\cdot X_1 + \sin(\varphi)\cdot X_2\big)$$

linear

$$W_p(\cos(\varphi)\cdot X_1 + \sin(\varphi)\cdot X_2) = \cos(\varphi) W_p(X_1) + \sin(\varphi) W_p(X_2)$$
$$= \cos(\varphi)\,\kappa_1 X_1 + \sin(\varphi)\,\kappa_2 X_2$$

κ_1 und κ_2 Eigenvektoren zum Eigenvektor $\quad W_p(X_i) = \kappa_i \cdot X_i \quad i = 1,2$

$$= I_p(\cos(\varphi)\kappa_1 X_1 + \sin(\varphi)\kappa_2 X_2,\ \cos(\varphi) X_1 + \sin(\varphi) X_2)$$

$$\overset{(**)}{=} \langle \cos(\varphi)\kappa_1 X_1 + \sin(\varphi)\kappa_2 X_2,\ \cos(\varphi) X_1 + \sin(\varphi) X_2\rangle$$ „Skalarprodukt"

$$\overset{\text{Orthonormalbasis}}{=} \cos^2(\varphi)\kappa_1 \underbrace{\langle X_1, X_1\rangle}_{1} + \sin^2(\varphi)\kappa_2 \underbrace{\langle X_2, X_2\rangle}_{1}$$

Orthonormalbasis: auf Länge 1 normiert und orthogonal (⊥) zueinander sind

$$= \cos^2(\varphi)\kappa_1 + \sin^2(\varphi)\kappa_2$$ und damit haben wir die Euler-Formel.

κ_1 und κ_2 sind min/max aller Normalkrümmungswerte von S in p, wenn X alle Richtungen durchläuft.

d.h. $\forall$ Einheitsvektoren $X \in T_pS$.

[Letztes Mal:] Die Weingarten-Abbildung $W_p: T_pS \to T_pS$ ist selbstadjungiert/symmetrisch.
Daher können wir eine Orthonormalbasis X_1, X_2 von T_pS finden, die aus Eigenvektoren von W_p besteht.

$$W_p(X_i) = K_i \cdot X_i \quad , i = 1,2$$

Zylinder, Kugel klar, weil jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung $\Rightarrow$ kann zwei wählen die orthogonal sind.

Anders: $K_1 \neq K_2$ Hauptkrümmungen mit Richtungen X_1 und X_2 dann gilt:

$$K_1 I_p(X_1, X_2) = I_p(K_1 X_1, X_2) =$$
$$I_p(W_p(X_1), X_2) = I_p(X_1, W(X_2)) =$$
$$I_p(X_1, K_2 X_2) = K_2 \, I_p(X_1, X_2)$$

also ist $I_p(X_1, X_2) = 0$

[Def. 3.6.3 ....]

$\varphi = 0 \Rightarrow II_p(X,X) = K_1$

φ bisschen größer als 0: $II(X,X) = K_1 \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{1-B} + K_2 \underbrace{\sin^2(\varphi)}_{B} = K(1-B) + B K_2$

$\overset{K_2 \geq K_1}{\geq} K_1 (1-B) + B K_1 = K_1 \quad \Rightarrow$ ist Minimum, Max auch so

[Bsp 3.6.4]

$S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ $N(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$W_p(x) = -d_p N = -\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Sei $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die x-y-Ebene in $\mathbb{R}^3$, [Beispiel schon gehabt] $W_p = 0$

$W_p = 0$, wobei $W_p(X) = K_1 \cdot X_1$

$\Rightarrow K_1 = K_2 = 0$ und wie wir vorher gesagt haben, wenn beide Hauptkrümmungen gleich, ist jede Richtung Hauptkrümmungsrichtung.

[Bsp 3.6.5]

Sei $S = S^2$ die Sphäre. Dann ist für das innere Einheitsnormalenfeld die Weingarten Abbildung $W_p = id$, dann $W_p(X) = K_1 \cdot X_1 \Rightarrow K_1 = 1$ und $K_2 = 1$ und jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung
$X_1 = K_1 \cdot X_1, X_2 = K_2 \cdot X_2$

[Bsp 3.6.6]

Sei $S = S^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder, $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Wie wir gesehen haben, hat die Weingarten Abbildung bzgl. des inneren Einheitsnormalenfeld und der Basis $X_1 = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ und $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ist eine Diagonalmatrix $\Rightarrow$ auf Diagonale sind Eigenwerte.

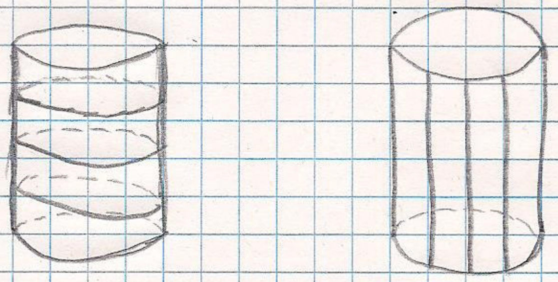
$K_1 = 1$ und $K_2 = 0$ und X_1 und X_2 sind Hauptkrümmungsrichtungen.

Def. 3.6.7

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $c: I \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Falls $\dot{c}(t)$ für alle $t \in I$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, so heißt c Krümmungslinie.

Beispiel 3.6.8

Auf dem Zylinder $S = S^1 \times \mathbb{R}$ sind die Krümmungslinien horizontale Kreislinien oder vertikale Geraden.



Def 3.6.9

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre Fläche, sei $p \in S$ ein Punkt. Seien κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmungen von S in p. Dann ist

$$K(p) := \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(W_p)$$

die Gauß Krümmung von S in p.

Ferner heißt

$$H(p) := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(W_p)$$

mittlere Krümmung von S in p.

Beide Krümmungsbegriffe stellen eine Mittelung der Hauptkrümmungen dar; die mittlere Krümmung ist das arithmetische Mittel, die Gauß-Krümmung das Quadrat des geometrischen Mittels. Die geometrische Bedeutung dieser Krümmungsbegriffe werden wir noch untersuchen.

Def.: 3.6.10

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre Fläche, sei $p \in S$. Man nennt p

(i) elliptisch, falls $K(p) > 0$

(ii) hyperbolisch, falls $K(p) < 0$

(iii) parabolisch, falls $K(p) = 0$, aber $W_p \neq 0$, d.h. falls eine der beiden Hauptkrümmungen verschwindet, die andere aber nicht.

(iv) Flachpunkt, falls $W_p = 0$, d.h. κ_1 und $\kappa_2 = 0$

Beispiel 3.6.11

Für die Ebene $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ gilt $W_p = 0$ für alle $p \in S$. Daher sind alle Punkte Flachpunkte. Es ist $K \equiv 0$ und $H \equiv 0$, weil $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \Rightarrow K = 0 \cdot 0 = 0$

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \Rightarrow \frac{0+0}{2} = 0$$

Beispiel 3.6.12

Für die Sphäre $S = S^2$ mit der durch das innere Einheitsnormalenfeld gegebenen Orientierung gilt $W_p = \mathrm{id}$ für alle $p \in S$. $\Rightarrow \kappa_1 = \kappa_2 = 1 \Rightarrow K \equiv 1$ und damit sind alle Punkte elliptisch. Die mittlere Krümmung $H \equiv 1$.

Beispiel 3.6.13

Für den Zylinder $S: S^1 \times \mathbb{R}$ mit der durch das innere Einheitsnormalenfeld gegebenen Orientierung haben wir berechnet: $\kappa_1 = 0$ und $\kappa_2 = 1$

Also gilt $K \equiv 0$ [wie für die Ebene] und $H \equiv \frac{1}{2}$.

Alle Punkte sind parabolisch.

Satz 3.6.15

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $p \in S$, und sei X_1, X_2 eine Orthonormalbasis von T_pS. Sei N glattes Einheitsnormalenfeld auf S, definiert in einer Umgebung des Punktes p, so dass $(X_1, X_2, N(p))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Dann gibt es eine lokale Parametrisierung (U, F, V) von S um p, so dass

(i) $(0,0)^T \in U$ und $F(0,0) = p$

(ii) $g_{ij}(0,0) = \delta_{ij}$, $i,j = 1,2$

(Drehung der T_pS in die x,y-Ebene) $\Rightarrow I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0,0) = 0$, $i,j,k = 1,2$

(iv) $F(u) - p = u_1 X_1 + u_2 X_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}(0,0)\, u^i u^j \cdot N(p) + O(\|u\|^3)$

ad i) ist klar, haben wir immer so gewählt, ist nur Verschiebung

ad ii) Kroneckerdelta: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ durch das Bauen wir dann auf $I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ad iii) bedeutet, dass man eine Parametrisierung finden kann, wo die Ableitung 0 ist, also nur geringe Änderung.

genauer: erste Fundamentalform nahe p weicht nur quadratisch vom Kronecker Delta ab

ad iv) $\underbrace{F(u) - p - u_1 X_1 - u_2 X_2}_{\text{beschreibt } T_pS} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\, u^i u^j \cdot N(p) + O(\|u\|^3)$

Rechte Seite gibt an, wie sich $F(u)$ nahe p von der T_pS unterscheidet. Unter Vernachlässigung der höheren Terme (fallen nahe p nicht ins Gewicht) ist dieser Unterschied also genau durch die (Matrix der) 2. Fundamentalform gegeben.

Genauer: durch eine quadratische Form (in u^i) deren Koeffizienten gerade die h_{ij} sind.

daher bestimmt h_{ij} die Krümmung in p, wie sich $F(u)$ und damit S nahe p von T_pS unterscheidet / wegbewegt.

~~$K(p) > 0$, elliptisch, $(h_{ij}(0,0))$ positiv/negativ definit $\Rightarrow$ S wird durch Paraboloid angenähert~~

Satz 3.6.17

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte nicht leere reguläre Fläche. Dann besitzt S einen Punkt p mit $K(p) > 0$. Dieser Satz ist global. Bedeutung: Fläche geht zusammen.

Hesse Matrix: $Hf(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j=1,\dots,n}$

Extremwerte:

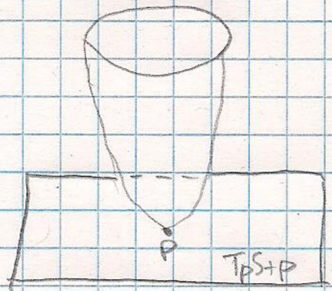
- Matrix an einer Stelle positiv definit $\Rightarrow$ lokales Minimum der Fkt.
- — // — negativ definit $\Rightarrow$ lokales Maximum
- ist sie indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt

1\. Fall: $K(p) > 0$, elliptisch

Dann ist $(h_{ij}(0,0))_{ij}$ positiv/negativ definit und somit wird S durch einen Paraboloiden angenähert.

K_1 ist schon Minimum, kann der Rest auch nur >0 sein, oder umgekehrt.
oder >0

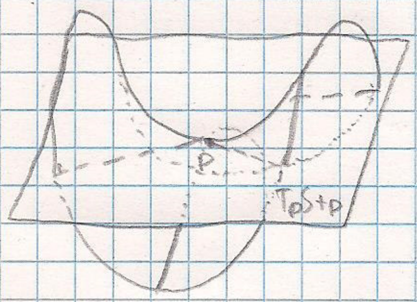
$K_1, K_2 > 0$



2\. Fall: $K(p) < 0$, hyperbolisch

Dann ist $(h_{ij}(0,0))_{ij}$ indefinit, aber nicht ausgeartet. Somit wird S nahe p durch eine Sattelfläche approximiert.

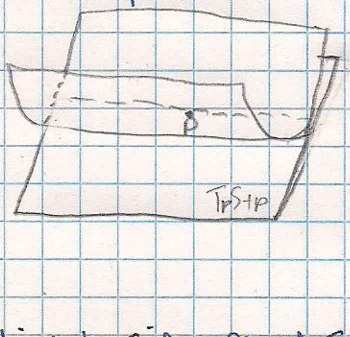
$K_1 > 0$, $K_2 < 0$ oder umgekehrt.



3\. Fall: p ist parabolisch, $K(p)=0$, aber $W_p \neq 0$ (eine Hauptkrümmung verschwindet, die andere nicht)

Dann ist $(h_{ij}(0,0))_{ij}$ ausgeartet, aber nicht 0. Nahe p sieht S wie die Zylinderfläche einer Parabel aus.

$K_1=0$, $K_2>0$



4\. Fall: p ist Flachpunkt

Dann ist $(h_{ij}(0,0))=0$ $\forall i,j=1,2$ und somit stimmt die Fläche S bis auf Terme dritter Ordnung mit ihrer Tangentialebene überein.