Universität Wien

Elementare Differentialgeometrie

Lehrveranstaltungsleiter
Roland Steinbauer

Verfasser:
Peter Egger a8825415
Julian Wiederin a1046139

Vortrag: 4.11.2015

Zuletzt geprüfte Version: 17.12.2015

1 Vektorfelder und kovariante Ableitung

Den folgenden Absatz kann man im Buch[1] unter Definition 4.2.9 nachlesen.

Definition 4.2.9: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $c : I \to S$ eine parametrisierte Kurve, und sei $v : I \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld an S längs c. Für jeden Punkt $p \,\epsilon\, S$ sei $\Pi_p : \mathbb{R}^3 \to T_{c(t)}S$ die Orthogonalprojektion, d.h. ist $N(p)$ einer der beiden Einheitsnormalenvektoren an S im Punkt p, so ist

$$\Pi_p(X) = X - \langle X, N(p)\rangle N(p)$$

Die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes v über eine Kurve c ist definiert als stinknormale Ableitung der Abbildung $v : I \to \mathbb{R}^3$ (siehe 1* unten).

$$\begin{aligned}\frac{\nabla}{dt}v(t) &:= \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t)) \\ &= \underbrace{\dot{v}(t)}_{siehe\ oben\ 1^*} - \underbrace{\langle(\dot{v}(t)), N(p)\rangle N(p)}_{\text{Anteil der Ableitung } \dot{v}(t) \text{ in Richtung } N(p)}\end{aligned}$$

Definition 4.2.15:[1] Sei S eine reguläre Fläche, v ein differenzierbares Vektorfeld auf S, $w_p \,\epsilon\, T_pS$ ein Tangentialvektor. Dann ist die kovariante Ableitung $\nabla_{\omega_p} v \,\epsilon\, T_pS$ von v in Richtung w_p wie folgt definiert:

Wähle eine parametrisierbare Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ mit $\dot{c}(0) = w_p$ und setze

$$\nabla_{\omega_p} v = \frac{\nabla}{dt}(v \circ c)(0).$$

Wir wollen v in der Basis $\frac{\partial F}{\partial u^i}$ schreiben:

$$v = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \tfrac{\partial F}{\partial u^i}$$

Und berechnen nun $\nabla_{\omega_p} v = \frac{\nabla}{dt}(v \circ c)(0)$

Hierzu definieren wir $\tilde{v} := v \circ c$ und $\tilde{c} = F^{-1} \circ c$ und rechnen:

$\frac{\nabla}{dt}\tilde{v}(t) = \Pi_{c(t)}(\dot{\tilde{v}}(t))$

$\tilde{v}(t) = \sum_{i=1}^{2} \tilde{\xi}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) = \sum_{i=1}^{2} \xi^i(c(t)) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t))$ unterVerwendung von: $\tilde{\xi}^i := \xi^i(c(t))$.
Nun leiten wir uns $\dot{\tilde{v}}$ her (bzw. versuchen es):

$$\dot{\tilde{v}} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{2}\tilde{\xi}^i(t)\frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t))\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\left(\dot{\tilde{\xi}}^i(t)\frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \tilde{\xi}^i(t)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(\tilde{c}(t))\dot{\tilde{c}}^j(t)\right) \qquad (2*)$$

Die Vektoren $\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}$ entwickeln wir nun in der Basis $\left\{\frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u), N(F(u))\right\}$ im $\mathbb{R}^3$ und definieren dabei:

$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} =: \Gamma^1_{ij}\frac{\partial F}{\partial u^1} + \Gamma^2_{ij}\frac{\partial F}{\partial u^2} + h_{ij}(u)N(F(u))$

Wir nennen hierbei $\Gamma^l_{ij}(l,i,j \in \{1,2\})$ die Christoffelsymbole von F. Hierbei erwähnenswert - die Symmetrie der Christoffelsymbole: $\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}$

Und es geht heiter weiter mit unserer Rechnung:

$$\dot{\tilde{v}} \overset{(2*)}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\left[\dot{\tilde{\xi}}^i(t)\frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t))\right.}_{\textbf{wir nennen nun } i=l} + \tilde{\xi}^i(t)\sum_{j=1}^{2}\underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(\tilde{c}(t))}_{\sum_{l=1}^{2}\Gamma^l_{ij}(\tilde{c}(t))\dot{\tilde{c}}^j(t)\frac{\partial F}{\partial u^l} + \textbf{proportional zu } N} \left.\cdot\dot{\tilde{c}}^j(t)\right]$$

Das "proportional zu N" steht deshalb da, weil dieser Term in Richtung des Normalvektors zeigt, den wir später sowieso wegwerfen :-) .

$$\Rightarrow \Pi_{c(t)}(\dot{\tilde{v}}(t)) =$$

$$= \Pi_{c(t)}\left[\sum_{l=1}^{2}\left(\dot{\tilde{\xi}}^l(t)\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t)) + \sum_{i,j=1}^{2}\tilde{\xi}^i(t)\Gamma^l_{ij}(\tilde{c}(t)) \cdot \dot{\tilde{c}}^j(t)\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t)) + \textbf{proportional zu } N\right)\right]$$

$$= \sum_{i,j,l=1}^{2}\left(\dot{\tilde{\xi}}^l(t) + \Gamma^l_{ij}(\tilde{c}(t))\tilde{\xi}^i(t) \cdot \underbrace{\dot{\tilde{c}}^j(t)}_{\omega^j(c(t))=:\tilde{\omega}^j(t)}\right)\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t))$$

$$= \sum_{i,j,l=1}^{2}\left(\dot{\tilde{\xi}}^l(t) + \Gamma^l_{ij}(\tilde{c}(t))\tilde{\xi}^i(t)\tilde{\omega}^j(t)\right)\frac{\partial F}{\partial u^l}(\tilde{c}(t))$$

Versuchen wir das ganze nochmal übersichtlich aufzuschreiben, also ohne die ganzen störenden Fußpunkte:

$$v = \sum_{l=1}^{2} \xi^l \frac{\partial F}{\partial u^l} \quad \xrightarrow{\nabla_w} \quad \sum_{i,j,l=1}^{2} \Bigg(\underbrace{\dot{\xi}^l}_{\text{stinknormale Ableitung}} + \underbrace{\Gamma^l_{ij}}_{\text{Korrektur wegen Flächenkrümmung}} \xi^i \underbrace{\dot{c}^j}_{\text{in Richtung w}} \Bigg) \frac{\partial F}{\partial u^l}$$

stöhn *ächz* ... Weshalb haben wir das eigentlich alles gerechnet?

Die Christoffelsymbole lassen sich nämlich als aus Koeffizienten der ersten Fundamentalform g_{ij} dargestellt werden (Buch Lemma: 4.2.17):

$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum\limits_{l=1}^{2} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \right) g^{li}$

Das kann man natürlich auch lustig nachrechnen... tun wir aber nicht.
ABER es sagt uns, dass die Christoffel-Symbole zur Inneren Geometrie gehören, damit gehört auch die **kovariante Ableitung** zur **inneren Geometrie**!

Eigenschaften der kovarianten Ableitung von Vektorfeldern:

(i) $\nabla_\omega v$ ist linear in ω also mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$\nabla_\omega (c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \nabla_\omega v_1 + c_2 \nabla_\omega v_2$

(ii) C^∞ linear in ω mit f ϵ $C^\infty(S)$

$\nabla_{f \cdot \omega_1 + \omega_2} v = f \nabla_{\omega_1} v + \nabla_{\omega_2} v$

(ii) Produktregel mit f ϵ $C^\infty(S)$

$\nabla_\omega (f v) = df(\omega) v + f \nabla_\omega v$

Metrizität: abhängig von z einem weiteren Vektorfeld

$\nabla_\omega \langle v, z \rangle = \langle \nabla_\omega v, z \rangle + \langle v, \nabla_\omega z \rangle$

2 Der Krümmungstensor

<u>**Definition**</u>: Sei S eine reguläre Fläche, $p \in S$ ein Punkt, $\upsilon, \omega \in T_pS$ Tangentialvektoren, dann ist der Riemannsche Krümmungstensor definiert durch:

$\mathcal{R}(v,w)(z) := \left(\nabla u \nabla w - \nabla w \nabla u - \nabla_{[v,w]}\right)(z).$

ezüglich einer lokalen Parametrisierung hat er die Form:

$\mathcal{R}(\upsilon,\omega)z = \sum\limits_{ijkl=1}^{2} \mathcal{R}_{ijk}^{l}(u_0)\upsilon^i\omega^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l}(u_0)$

wobei

$\mathcal{R}_{ijk}^{l} = \frac{\partial \Gamma_{kj}^{l}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^{l}}{\partial u^j} + \sum\limits_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{mi}^{l}\Gamma_{kj}^{m} - \Gamma_{mj}^{l}\Gamma_{ki}^{m}\right)$

$\Bigg($ Unter Freunden könnte man sagen, $\mathcal{R}_{ijk}^{l}$ ist von der Form $\partial\Gamma + \Gamma^2\Bigg)$

Somit gehört auch der Krümmungstensor zur inneren Geometrie *jubel* *freu* - was uns schließlich schon fast zu unserem finalen Ergebnis bringt.
Seien $\upsilon, \omega, x, y \in T_pS$, dann gilt für den Riemannschen Krümmungstensor:

(i) $\mathcal{R}(\upsilon,\omega)x = -\mathcal{R}(\omega,\upsilon)x$

(ii) $I(\mathcal{R}(\upsilon,\omega)x,y) = -I(\mathcal{R}(\upsilon,\omega)y,x)$

(iii) $I(\mathcal{R}(\upsilon,\omega)x,y) = I(\mathcal{R}(x,y)\upsilon,\omega)$

(iv) $\mathcal{R}(\upsilon,\omega)x + \mathcal{R}(x,\upsilon)\omega + \mathcal{R}(\omega,x)\upsilon = 0$

Der n-dimensionale Riemantensor hat $\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)$ unabhngige Komponenten.
D.h bei uns (n=2) also nur eine. Fr n=3 sind es schon 6 unabhngige Komponenten.

3 Riemann Metrik

Von nun an wollen wir nur noch Innere Geometrie betreiben. Bisher haben wir uns aus dem $\mathbb{R}^3$ das Skalarprodukt "ausgeliehen" und es als erste Fundamentalform auf die Tangentialebene eingeschränkt. Da wir nun jedoch diese "äußere 3D-Sicht" nicht mehr brauchen, können wir auch anstatt dem Standardskalarprodukt andere Metriken finden. <u>**Zur Erinnerung:**</u>
Ein Skalarprodukt $\langle .,. \rangle : M \times M \to \mathbb{R}$ muss für alle $x, y, z \in M, \lambda \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften erfüllen:
(i) Bilinearität: $\langle x + \lambda y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$
(ii) Symmetrie: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
(iii) Positive Definitheit $\langle x, x\rangle \geq 0$ und $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(Die Positive Definitheit wird manchmal durch die schwächere Forderung $\langle x, y\rangle = 0\ \forall x \Rightarrow y = 0$ beschrieben, eine solche symmetrische Bilinearform heißt nicht entartet.)

Definition:
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Eine *riemannsche Metrik* g auf S ordnet jedem Punkt $p \in S$ ein euklidisches Skalarprodukt g_p auf der Tangentialebene T_pS zu, sodass für jede lokale Parametrisierung (U, F, V) von S die Funktionen

$$g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g_{ij}(u) := g_{F(u)}\left(\tfrac{\partial F}{\partial u^i}(u), \tfrac{\partial F}{\partial u^j}(u)\right),$$

glatt sind.

Wir können nun alle Begriffe der Inneren Geometrie auch über eine Riemannsche Metrik definieren, ohne explizit die erste Fundamentalform zu verwenden.

Weshalb sollten wir das tun? Erstens, weil wir können und somit auf die Außensicht des $\mathbb{R}^3$ verzichten können und weil wir dadurch lustige und interessante Konstrukte erhalten, wie etwa hyperbolische Ebenen.

Wir definieren nun, wie auch vorher mit der ersten Fundamentalform schon die Christoffel-Symbole durch

$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum\limits_{l=1}^{2}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\right) g^{il}$ wobei hier g^{il} die Einträge der Inversen der Riemann-Metrik sind.

und dadurch die kovariante Ableitung der Vektorfelder

$\upsilon = \sum\limits_i \upsilon^i \frac{\partial F}{\partial u^i}, \quad \omega = \sum\limits_j \omega^i \frac{\partial F}{\partial u^j}$
durch $\nabla_\omega \upsilon(F(u)) := \sum\limits_k \left(\sum\limits_l \frac{\partial \upsilon^k}{\partial u^l}\omega^l + \sum\limits_{ij} \Gamma^k_{ij}(u)\upsilon^i(u)\omega^j(u)\right)\frac{\partial F}{\partial u^k}(u)$

Auch der Krümmungstensor und die Gausskrümmung lassen sich durch die Riemannmetrik darstellen:

$\mathcal{R}^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial u^j} + \sum\limits_{m=1}^{2}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^l_{mj}\Gamma^m_{ki}\right)$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{ijk} g^{jk}\mathcal{R}^i_{ijk}$$

(Diesmal mit den Einträgen der Riemannmetrik und nicht der Ersten Fundamentalform)
Das Beispiel 4.4.2 (siehe[1]) führt aus, das $g_{i,j} = konstant$ sind und daher die Christoffel-Symbole veschwinden. Daraus folgt, dass der riemannsche Krmmungstensor

ebenfalls verschwindet und somit gilt:

$$K \equiv 0$$

Man beachte, dass dies für die erste Fundamentalform (Seite 186[1]) auf einer kompakten reglären Fläche nicht möglich ist, da wegen Satz 3.6.17[1] dann die Gauß-Krümmung irgenwo positiv sein muss.

Wie kann man nun aber so eine Riemannmetrik konstruieren?
Eine beliebte Methode ist das "Zurückziehen" einer Metrik auf eine diffeomorphe Fläche:

<u>Definition</u>: Seien S_1" und S_2 reguläre Flächen, $\Phi : S_1 \to S_2$ ein Diffeomorphismus. Sei g eine Riemannsche Metrik auf S_2. Die zurückgezogene Riemannsche Metrik $\Phi^* g$ auf S_1 ist definiert durch:

$(\Phi^* g)_p(X, Y) := g_{\Phi(p)}(d_p\Phi(X), d_p\Phi(Y))$

Das schöne daran ist, dass diese zurückgezogene Metrik die eindeutige Metrik ist, für die $\Phi : S_1 \to S_2$ eine Isometrie ist. Somit ergibt sich:

(i) ist F eine lokale Parametrisierung von S_1, dann ist $\Phi \circ F$ eine lokale Parametrisierung von S_2

(ii) $(\Phi^* g)_{ij} = g_{ij}$

(iii) die Größen der Inneren Geometrie bleiben erhalten, so gilt beispielsweise für die Gausskrümmung $K_{\Phi^* g} = K_g \circ \Phi$

4 Die GAUSS GLEICHUNG

Wie Gauss für uns gottseidank schon bewiesen hat (und wir vertrauen natürlich großen Mathematiker und Mathematikerinnen) gilt:

$$\mathcal{R}_{(v,\omega)}z = \mathbb{I}(\omega, z) \cdot W(v) - \mathbb{I}(v, z)W(\omega)$$

Was fällt hier auf? Wir haben eigentlich nur Größen der Äußeren Geometrie auf der rechten Seite der Gleichung, aber eine Größe der Inneren Geometrie auf der linken Seite! Was uns nun wirklich zum Finale führt, d.h. wir sind unabhängig von der äußeren Geometrie und können von nun an mit Größen der inneren Geometrie rechnen.

5 THEOREMA EGREGIUM

Seien $v(p), \omega(p)$ eine ONB in jeden T_pS, dann gilt:

$$K = I\Bigg(\mathcal{R}(v,\omega)\omega, v\Bigg)$$

Beweis:

$I\Bigg(\mathcal{R}(v,\omega)\omega, v\Bigg) = I\Bigg(\mathbb{III}(\omega,\omega)W(v) - \mathbb{III}(v,\omega) \cdot W(\omega), v\Bigg) =$
$\mathbb{III}(\omega,\omega)I\Bigg(W(v), v\Bigg) - \mathbb{III}(v,\omega)I\Bigg(W(\omega), v\Bigg) = \mathbb{I}(\omega,\omega)\mathbb{I}(v,v) - \mathbb{I}(v,\omega)\mathbb{I}(\omega,v) = det(W) =$
K

Und somit ist finally die GAUSSKRÜMMUNG EINE GRÖSSE DER INNEREN GEOMETRIE - und wir können endlich, dank Isometrien und dieser Erkenntnis - Pizza essen, ohne uns dabei dreckig zu machen.

6 Zusammenfassung - Größen der Inneren Geometrie

geometrische Größe	Symbol	Formel bezüglich einer lokalen Parametrisierung
1. Fundamentalform	$\mathbb{I}$	g_{ji}
kovariante Ableitung	∇	$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum\limits_{l=1}^{2} g^{il}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\right)$
Riemannscher Krümmungstensor	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial u^j} + \sum\limits_{m=1}^{2}\left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^l_{mj}\Gamma^m_{ki}\right)$
Gauss-Krümmung	K	$K = \frac{1}{2}\sum\limits_{ijk} g^{jk}\mathcal{R}^i_{ijk}$
Gauss-Krümmung mit Vektorfeldern	K	$K = I\Big(\mathcal{R}(\upsilon,\omega)\omega,\upsilon\Big)$

7 Zusammenfassung - Größen der Äußeren Geometrie

geometrische Größe	Symbol	Formel bezüglich einer lokalen Parametrisierung
2. Fundamentalform	$\mathbb{II}$	h_{ji}
Weingarten-Abbildung	W	$W^j_i = \sum\limits_{k=1}^{2} h_{ik}\cdot g^{kj}$
Hauptkrümmungen	κ_i	
Mittlere Krümmung	H	$H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{W^1_1+W^2_2}{2}$

References

[1] Christian Bär, Elementare Differentialgeometrie, Verlag De Gruyter, 2., berarbeitete und erweiterte Auflage, 2010, ISBN: 978-3-11-022458-0