Exponentialabbildung

In diesem Handout bezeichnet S immer eine beliebige reguläre Fläche, p einen Punkt auf S, T_pS die Tangentialebene in p und g eine riemannsche Metrik von S.

1. Wiederholung

Für $p \in S$ und $v \in T_pS$ existiert genau eine Geodäte c_v (definiert zumindest auf einem Intervall I um 0, das wir maximal wählen können), die durch den Punkt p in Richtung v verläuft, also $c_v(0) = p, \dot{c}_v(0) = v$

2. Definition

Für einen Vektor $v \in T_pS$ und der (eindeutigen) Geodäte $c : I \to S$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$, setzen wir, falls $c(1)$ noch existiert, also $1 \in I$:

$$\exp_p(v) := c(1)$$

Die Abbildung $\exp_p : \mathcal{D}_p \subset T_pS \to S$ heißt Exponentialabbildung.
Man kann zeigen, dass $\exp_p$ glatt und $\mathcal{D}_p$ offen ist.

3. Umkehrsatz

Um die Exponentialabbildung (zumindest lokal) invertieren zu können, benötigen wir den Umkehrsatz:

> Es sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, ein $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Wenn im Punkt $a \in D$ die Determinante der Jacobimatrix ungleich null, also invertierbar ist, dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset D$ von a, und eine offenen Umgebung V von $b := f(a)$, sodass $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.[1]

Da $d_0 exp_p = id : T_pS \to T_pS$ gibt es nach dem Satz eine Umgebung W von $0 \in \mathcal{D}_p$, so dass $\exp_p|_W : W \to \exp_p(W) \subset S$ ein Diffeomorphismus ist. Für eine lokale Parametrisierung (U_1, F_1, V_1) der Tangentialebene T_pS erhalten wir durch die Wahlen $U := F_1^{-1}(W)$, $F := \exp_p \circ F_1|_U$ und $V \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $V \cap S = \exp_p(W)$ eine lokale Parametrisierung (U, F, V) von S.

4. Parametrisierungen

Seien X_1, X_2 eine Orthonormalbasis von T_pS und $F_1(u^1, u^2) = \sum_i u^i X_i$, dann heißt die entsprechende Parametrisierung mit $F(u^1, u^2) = \exp_p(\sum_i u^i X_i)$ Parametrisierung durch riemannsche Normalkoordinaten (um den Punkt p).
Für $F_1(r, \varphi) = r \cdot (\cos(\varphi)X_1 + \sin(\varphi)X_2)$ heißt die entsprechende Parametrisierung mit $F(r, \varphi) = \exp_p(r \cdot (\cos(\varphi)X_1 + \sin(\varphi)X_2))$ Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten (um den Punkt p).

5. Gauß-Lemma

Sei F eine lokale Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten (r, φ). Dann hat bzgl. dieser lokalen Parametrisierung die riemannsche Metrik die Form

$$(g_{ij}(r, \varphi))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(r, \varphi)^2 \end{pmatrix}$$

mit einer positiven Funktion $f(r, \varphi)$ die $\lim_{r \to 0} f(r, \varphi) = 0$ und $\lim_{r \to 0} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \varphi) = 1$ erfüllt.
Alternative Formulierung:
Die Tangenten an radiale Geodäten stehen normal auf die Niveaulinie $N_f(r)$ mit Abstand $r = \text{const}$ vom Punkt p.

[1] siehe: Königsberger, Konrad: Analysis 2. Springer 2004, S.104