Innere Geometrie I

Von I_p zur Richtungsableitung auf regulären Flächen

Harald Kittinger und Andreas Wiederin

Vortrag im Seminar Analysis für LAK

Universität Wien, 2015

1. Von I_p zur Krümmung
   - Erste Fundamentalform und Normalenfelder
   - Gaußabbildung, Weingartenabbildung und zweite Fundamentalform
   - Krümmung
2. Isometrien
   - Lokale Isometrien
   - Innere Geometrie
3. Vektorfelder, Richtungsableitung und Gradient
   - Richtungsableitung über Kurven und Flächen
   - Die Lie-Klammer

Erste Fundamentalform

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$ und T_pS die Tangentialebene an S in p. Dann heißt die Abbildung, die jedem $p \in S$ die Einschränkung

$$g_p := \langle \cdot, \cdot \rangle |_{T_pS \times T_pS}$$

zuordnet **erste Fundamentalform** von S und definiert ein euklidisches Skalarprodukt auf T_pS.
Die folgenden Schreibweisen sind synonym

$$I_p(X, Y) = g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle \ \ mit\ X, Y \in T_pS$$

Erste Fundamentalform

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$ und T_pS die Tangentialebene an S in p. Dann heißt die Abbildung, die jedem $p \in S$ die Einschränkung

$$g_p := \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_pS \times T_pS}$$

zuordnet **erste Fundamentalform** von S und definiert ein euklidisches Skalarprodukt auf T_pS.
Die folgenden Schreibweisen sind synonym

$$I_p(X, Y) = g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle \ \ mit\ X, Y \in T_pS$$

Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform

Euklidische Skalarprodukte auf Vektorräumen lassen sich nach der Wahl einer Basis durch eine positiv definite symmetrische Matrix darstellen.

Zur lokalen Parametrisierung (U,F,V) von S und mit $u = F^{-1}(p)$ liefert die Basis

$$D_u F(e_k) = \frac{\partial F}{\partial u^k}(u), \quad k \in \{1, 2\}$$

die **Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform**

$$g_{ij}(u) := g_p(D_u F(e_i), D_u F(e_j)) = \langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \rangle$$

Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform

Euklidische Skalarprodukte auf Vektorräumen lassen sich nach der Wahl einer Basis durch eine positiv definite symmetrische Matrix darstellen.
Zur lokalen Parametrisierung (U,F,V) von S und mit $u = F^{-1}(p)$ liefert die Basis

$$D_u F(e_k) = \frac{\partial F}{\partial u^k}(u), \quad k \in \{1, 2\}$$

die **Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform**

$$g_{ij}(u) := g_p(D_u F(e_i), D_u F(e_j)) = \langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \rangle$$

Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform

Euklidische Skalarprodukte auf Vektorräumen lassen sich nach der Wahl einer Basis durch eine positiv definite symmetrische Matrix darstellen.
Zur lokalen Parametrisierung (U,F,V) von S und mit $u = F^{-1}(p)$ liefert die Basis

$$D_u F(e_k) = \frac{\partial F}{\partial u^k}(u), \quad k \in \{1, 2\}$$

die **Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform**

$$g_{ij}(u) := g_p(D_u F(e_i), D_u F(e_j)) = \langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \rangle$$

Definition Normalenfeld

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Ein **Normalenfeld** auf S ist eine Abbildung

$$N : S \to \mathbb{R}^3$$

so, dass

$$N(p) \perp T_pS \;\; \mathit{f\ddot{u}r\ alle} \;\; p \in S$$

Ein Normalenfeld auf S heißt **Einheitsnormalenfeld** falls zusätzlich $\| N(p) \| = 1$ für alle $p \in S$ gilt.

Definition Normalenfeld

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Ein **Normalenfeld** auf S ist eine Abbildung

$$N : S \to \mathbb{R}^3$$

so, dass

$$N(p) \perp T_p S \ \ f\ddot{u}r\, alle \ \ p \in S$$

Ein Normalenfeld auf S heißt **Einheitsnormalenfeld** falls zusätzlich $\| N(p) \| = 1$ für alle $p \in S$ gilt.

Normalenfeld der yx-Ebene in $\mathbb{R}^3$

Sei $S = \left\{(y, x, 0)^T | x, y \in \mathbb{R}\right\}$, dann ist $N(x, y, 0) = (0, 0, 1)^T$ ein konstantes Einheitsnormalenfeld auf S.

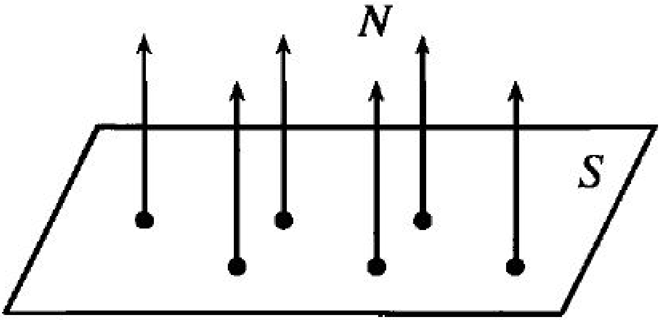
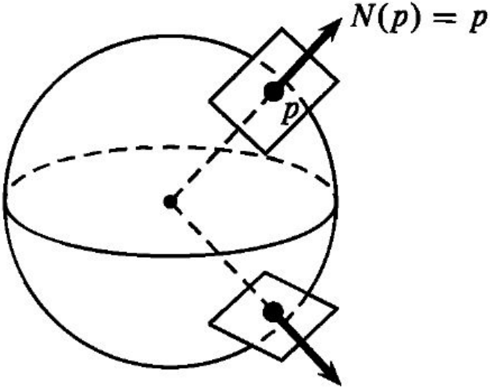


Abb. 82

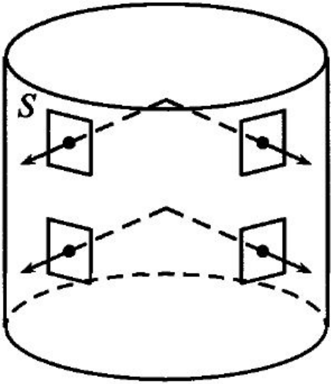
Sphäre

Sei $S = S^2$. Dann erhalten wir ein Einheitsnormalenfeld durch $N = Id$.



Zylinder

Sei $S = S^1 \times \mathbb{R}$ die Zylinderfläche. Dann ist durch $N(x, y, z) = (x, y, 0)^T$ ein Einheitsnormalenfeld definiert.



Möbiusband

Das Möbiusband besitzt kein stetiges Einheitsnormalenfeld.

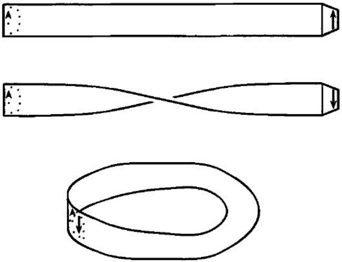


Abb. 85

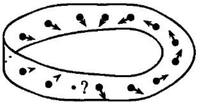


Abb. 86

Orientierbarkeit

Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt **orientierbar**, falls es ein glattes Einheitsnormalenfeld auf S gibt.

Was ist der Plan?

Mit der zweiten Fundamentalform können wir Aussagen über die Krümmungen von Flächen treffen. Der Weg dorthin im Überblick:

- Die Gaußabbildung, also das ENF in neuem Licht
- Die Weingartenabbildung als Differential der Gaußabbildung
- Diese ist selbstadjungiert, also durch eine sym. Bilinearform gegeben
- $II_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ ist genau diese Bilinearform
- Wie rechnet man II_p dann aus?

Was ist der Plan?

Mit der zweiten Fundamentalform können wir Aussagen über die Krümmungen von Flächen treffen. Der Weg dorthin im Überblick:

- Die Gaußabbildung, also das ENF in neuem Licht
- Die Weingartenabbildung als Differential der Gaußabbildung
- Diese ist selbstadjungiert, also durch eine sym. Bilinearform gegeben
- $II_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ ist genau diese Bilinearform
- Wie rechnet man II_p dann aus?

Was ist der Plan?

Mit der zweiten Fundamentalform können wir Aussagen über die Krümmungen von Flächen treffen. Der Weg dorthin im Überblick:

- Die Gaußabbildung, also das ENF in neuem Licht
- Die Weingartenabbildung als Differential der Gaußabbildung
- Diese ist selbstadjungiert, also durch eine sym. Bilinearform gegeben
- $II_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ ist genau diese Bilinearform
- Wie rechnet man II_p dann aus?

Was ist der Plan?

Mit der zweiten Fundamentalform können wir Aussagen über die Krümmungen von Flächen treffen. Der Weg dorthin im Überblick:

- Die Gaußabbildung, also das ENF in neuem Licht
- Die Weingartenabbildung als Differential der Gaußabbildung
- Diese ist selbstadjungiert, also durch eine sym. Bilinearform gegeben
- $II_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ ist genau diese Bilinearform
- Wie rechnet man II_p dann aus?

Was ist der Plan?

Mit der zweiten Fundamentalform können wir Aussagen über die Krümmungen von Flächen treffen. Der Weg dorthin im Überblick:

- Die Gaußabbildung, also das ENF in neuem Licht
- Die Weingartenabbildung als Differential der Gaußabbildung
- Diese ist selbstadjungiert, also durch eine sym. Bilinearform gegeben
- $II_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ ist genau diese Bilinearform
- Wie rechnet man II_p dann aus?

Gauß-Abbildung

Sei S eine orientierbare reguläre Fläche, d.h. mit glattem Einheitsnormalenfeld: $N : S \to \mathbb{R}^3$, $p \mapsto N(p) \in \mathbb{R}^3$ mit $N(p) \perp T_pS$ und $N(p) \in S^2$ (wegen $\|N(p)\| = 1$)

Fassen wir nun N direkt als Abbildung zwischen zwei regulären Flächen

$$N : S \to S^2$$

auf, so heißt N **Gaußabbildung**

Gauß-Abbildung

Sei S eine orientierbare reguläre Fläche, d.h. mit glattem Einheitsnormalenfeld: $N : S \to \mathbb{R}^3$, $p \mapsto N(p) \in \mathbb{R}^3$ mit $N(p) \perp T_pS$ und $N(p) \in S^2$ (wegen $\|N(p)\| = 1$)

Fassen wir nun N direkt als Abbildung zwischen zwei regulären Flächen

$$N : S \to S^2$$

auf, so heißt N **Gaußabbildung**

Weingartenabbildung

Wir betrachten nun d_pN für $N : S \to S^2$, also

$$d_pN : T_pS \to T_{N(p)}S^2$$

Dabei ist ja

$$T_{N(p)}S^2 \overset{(BSP)}{=} N(p)^\perp \overset{\text{Def. ENF}}{=} T_pS$$

Also ist $d_pN : T_pS \to T_pS$ also eine Abbildung von einem Vektorraum in sich selbst.

Weingartenabbildung

Wir betrachten nun d_pN für $N : S \to S^2$, also

$$d_pN : T_pS \to T_{N(p)}S^2$$

Dabei ist ja

$$T_{N(p)}S^2 \overset{(BSP)}{=} N(p)^{\perp} \overset{\text{Def. ENF}}{=} T_pS$$

Also ist $d_pN : T_pS \to T_pS$ also eine Abbildung von einem Vektorraum in sich selbst.

Weingartenabbildung

Wir betrachten nun d_pN für $N : S \to S^2$, also

$$d_pN : T_pS \to T_{N(p)}S^2$$

Dabei ist ja

$$T_{N(p)}S^2 \overset{(BSP)}{=} N(p)^{\perp} \overset{\text{Def. ENF}}{=} T_pS$$

Also ist $d_pN : T_pS \to T_pS$ also eine Abbildung von einem Vektorraum in sich selbst.

Weingartenabbildung

Sei S eine reguläre Fläche orientiert durch ENF N. Für jedes $p \in S$ heißt der Endomorphismus

$$W_p \; : \; T_pS \to T_pS$$

$$W_p(X) := -d_pN(X)$$

Weingartenabbildung

W_p ist dann selbstadjungiert bezügl. der ersten Fundamentalform (OB), d.h.

$$I_p(X, W_p(Y)) = I_p(W_p(X), Y)$$

Weingartenabbildung

Sei S eine reguläre Fläche orientiert durch ENF N. Für jedes $p \in S$ heißt der Endomorphismus

$$W_p : T_pS \to T_pS$$

$$W_p(X) := -d_pN(X)$$

Weingartenabbildung

W_p ist dann selbstadjungiert bezügl. der ersten Fundamentalform (OB), d.h.

$$I_p(X, W_p(Y)) = I_p(W_p(X), Y)$$

Zweite Fundamentalform

Die zur Weingartenabbildung W_p gehörige Bilinearform heißt **zweite Fundamentalform** von S in p :

$$II_p(X, Y) = I_p(W_p(X), Y)$$

Zweite Fundamentalform

Die zur Weingartenabbildung W_p gehörige Bilinearform heißt **zweite Fundamentalform** von S in p :

$$II_p(X, Y) = I_p(W_p(X), Y)$$

Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform

Sei (U, F, V) eine lok. Par. um $p \in S$ und $u = F^{-1}(p)$. Dann ist mit

$$h_{ij} = II_p(D_uF(e_i), D_uF(e_j)) = I_p(W_p(D_uF(e_i), D_uF(e_j))$$

$$h_{ij} = \langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(u), N(p) \rangle$$

die **Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform** gegeben.

1. Von I_p zur Krümmung
   - Erste Fundamentalform und Normalenfelder
   - Gaußabbildung, Weingartenabbildung und zweite Fundamentalform
   - Krümmung
2. Isometrien
   - Lokale Isometrien
   - Innere Geometrie
3. Vektorfelder, Richtungsableitung und Gradient
   - Richtungsableitung über Kurven und Flächen
   - Die Lie-Klammer

Motivation mit Raumkurve

Sei $p \in S \subset \mathbb{R}^3$, S eine reguläre Fläche mit Orientierung durch ein glattes Einheitsnormalenfeld N. Sei weiter $c : I \to S$, $c(0) = p$

Für c als Raumkurve gilt dann für die Krümmung $\kappa(0)$ von c in p gem. Definition

$$\ddot{c}(0) = \kappa(0) \cdot n(0) \qquad \kappa(0) \neq 0$$

Diese Krümmung soll nun in zwei Teile zerlegt werden:
(1) für die (geodätische) Krümmung von c innerhalb von S
(2) für den Teil der c durch die Krümmung von S im $\mathbb{R}^3$ aufgezwungen wird.

Motivation mit Raumkurve

Sei $p \in S \subset \mathbb{R}^3$, S eine reguläre Fläche mit Orientierung durch ein glattes Einheitsnormalenfeld N. Sei weiter $c : I \to S$, $c(0) = p$

Für c als Raumkurve gilt dann für die Krümmung $\kappa(0)$ von c in p gem. Definition

$$\ddot{c}(0) = \kappa(0) \cdot n(0) \qquad \kappa(0) \neq 0$$

Diese Krümmung soll nun in zwei Teile zerlegt werden:
(1) für die (geodätische) Krümmung von c innerhalb von S
(2) für den Teil der c durch die Krümmung von S im $\mathbb{R}^3$ aufgezwungen wird.

Motivation mit Raumkurve

Sei $p \in S \subset \mathbb{R}^3$, S eine reguläre Fläche mit Orientierung durch ein glattes Einheitsnormalenfeld N. Sei weiter $c : I \to S$, $c(0) = p$

Für c als Raumkurve gilt dann für die Krümmung $\kappa(0)$ von c in p gem. Definition

$$\ddot{c}(0) = \kappa(0) \cdot n(0) \qquad \kappa(0) \neq 0$$

Diese Krümmung soll nun in zwei Teile zerlegt werden:
(1) für die (geodätische) Krümmung von c innerhalb von S
(2) für den Teil der c durch die Krümmung von S im $\mathbb{R}^3$ aufgezwungen wird.

Krümmung

Dazu wird $n(0)$ in einen Tangential- und einen Normalteil bezüglich S zerlegt:

$$n(0) = n(0)^{\|} + n(0)^{\perp}$$

Dabei ist letzteres die Projektion auf den Normalvektor von S : $n(0)^{\perp} = \langle n(0), N(p)\rangle N(p)$

Damit ist

$$\ddot{c}(0) = \underbrace{\kappa(0)n(0)^{\|}}_{\textit{Entspricht } (1)} + \underbrace{\kappa(0)\langle n(0), N(p)\rangle N(p)}_{\textit{Entspricht } (2)}$$

Krümmung

Dazu wird $n(0)$ in einen Tangential- und einen Normalteil bezüglich S zerlegt:

$$n(0) = n(0)^{\|} + n(0)^{\perp}$$

Dabei ist letzteres die Projektion auf den Normalvektor von S : $n(0)^{\perp} = \langle n(0), N(p)\rangle N(p)$

Damit ist

$$\ddot{c}(0) = \underbrace{\kappa(0)n(0)^{\|}}_{\textit{Entspricht } (1)} + \underbrace{\kappa(0)\langle n(0), N(p)\rangle N(p)}_{\textit{Entspricht } (2)}$$

Krümmung

Dazu wird $n(0)$ in einen Tangential- und einen Normalteil bezüglich S zerlegt:

$$n(0) = n(0)^{\parallel} + n(0)^{\perp}$$

Dabei ist letzteres die Projektion auf den Normalvektor von S : $n(0)^{\perp} = \langle n(0), N(p)\rangle N(p)$

Damit ist

$$\ddot{c}(0) = \underbrace{\kappa(0)n(0)^{\parallel}}_{\textit{Entspricht } (1)} + \underbrace{\kappa(0)\langle n(0), N(p)\rangle N(p)}_{\textit{Entspricht } (2)}$$

Normalkrümmung

Die **Normalkrümmung** an $p \in S$ in Richtung $\dot{c}(0)$ ist definiert als

$$\kappa_{nor}(p, \dot{c}(t)) = \langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle = \begin{cases} \kappa(0)\langle n(0), N(p)\rangle N(p) & \kappa(0) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit haben wir zwar einen Begriff von Krümmung, aber hängt dieser nicht von der Wahl der Kurve c ab? Nein! Mit dem Satz von Meusnier (OB) hängt κ_{nor} nur von $\dot{c}$ ab!

$$\kappa_{nor}(p, \dot{c}(0)) = II_p(\dot{c}(0), \dot{c}(0))$$

Normalkrümmung

Die **Normalkrümmung** an $p \in S$ in Richtung $\dot{c}(0)$ ist definiert als

$$\kappa_{nor}(p, \dot{c}(t)) = \langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle = \begin{cases} \kappa(0)\langle n(0), N(p)\rangle N(p) & \kappa(0) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit haben wir zwar einen Begriff von Krümmung, aber hängt dieser nicht von der Wahl der Kurve c ab? Nein! Mit dem Satz von Meusnier (OB) hängt κ_{nor} nur von $\dot{c}$ ab!

$$\kappa_{nor}(p, \dot{c}(0)) = II_p(\dot{c}(0), \dot{c}(0))$$

Hauptkrümmungen

Wir wissen, dass $W_p : T_pS \to T_pS$ stets selbstadjungiert ist, daher gibt es eine Orthonormalbasis X_1, X_2 für T_pS die aus Eigenvektoren von W_p besteht (Lin.Alg!):

$$W_p(X_i) = \kappa_i X_i \qquad i \in \{1, 2\}$$

Die Eigenwerte κ_1 und κ_2 heißen **Hauptkrümmungen** von S im Punkt p. Die Zugehörigen Eigenvektoren $\pm X_1, \pm X_2$ heißen **Hauptkrümmungsrichtungen**.

Hauptkrümmungen

Wir wissen, dass $W_p : T_pS \to T_pS$ stets selbstadjungiert ist, daher gibt es eine Orthonormalbasis X_1, X_2 für T_pS die aus Eigenvektoren von W_p besteht (Lin.Alg!):

$$W_p(X_i) = \kappa_i X_i \quad i \in \{1, 2\}$$

Die Eigenwerte κ_1 und κ_2 heißen **Hauptkrümmungen** von S im Punkt p. Die Zugehörigen Eigenvektoren $\pm X_1, \pm X_2$ heißen **Hauptkrümmungsrichtungen**.

Hauptkrümmungen

Die Hauptrkümmungen sind die Extrema der Normalkrümmungen. Per Konvention sei im Folgenden wenn nicht anders angegeben $\kappa_1 \leq \kappa_2$

Wenn $c : I \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ist, und $\dot{c}(t)$ für alle $t \in I$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, dann heißt c **Krümmungslinie**

Hauptkrümmungen

Die Hauptrkümmungen sind die Extrema der Normalkrümmungen. Per Konvention sei im Folgenden wenn nicht anders angegeben $\kappa_1 \leq \kappa_2$

Wenn $c : I \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ist, und $\dot{c}(t)$ für alle $t \in I$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, dann heißt c **Krümmungslinie**

Mittlere Krümmung und Gaußkrümmung

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Orientierte reguläre Fläche, p∈S , $\kappa_1$und κ_2 die Hauptkrümmungen von S in p. Dann heißen

$$K(p) := \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(W_p)$$

die **Gauß-Krümmung** von S in p

$$H(p) := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(W_p)$$

mittlere Krümmung von S in p.

Mittlere Krümmung und Gaußkrümmung

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Orientierte reguläre Fläche, p$\in$S , $\kappa_1$und κ_2 die Hauptkrümmungen von S in p. Dann heißen

$$K(p) := \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(W_p)$$

die **Gauß-Krümmung** von S in p

$$H(p) := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(W_p)$$

mittlere Krümmung von S in p.

Mittlere Krümmung und Gaußkrümmung

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Orientierte reguläre Fläche, p$\in$S , $\kappa_1$und κ_2 die Hauptkrümmungen von S in p. Dann heißen

$$K(p) := \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(W_p)$$

die **Gauß-Krümmung** von S in p

$$H(p) := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(W_p)$$

mittlere Krümmung von S in p.

Erinnerung

Isometrien sind Abbildungen die mit der verwendeten Metrik verträglich, also längenerhaltend sind

Definition lokale Isometrie

Seien S_1 und S_2 reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$. Eine glatte Abbildung $f : S_1 \to S_2$ heißt **lokale Isometrie**,falls für alle $p \in S_1$ das Differential

$$d_p f : T_p S_1 \to T_{f(p)} S_2$$

eine lineare Isometrie bezüglich der ersten Fundamentalform ist, also

$$\langle d_p f(X), d_p f(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle \quad \forall X, Y \in T_p S_1 \tag{1}$$

Definition lokale Isometrie

Seien S_1 und S_2 reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$. Eine glatte Abbildung $f : S_1 \to S_2$ heißt **lokale Isometrie**,falls für alle $p \in S_1$ das Differential

$$d_pf : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$$

eine lineare Isometrie bezüglich der ersten Fundamentalform ist, also

$$\langle d_pf(X), d_pf(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle \quad \forall X, Y \in T_pS_1 \tag{1}$$

Lokale Isometrien

Alle Größen, die innerhalb der Fläche “messbar” sind (z.B. Längen von Kurven, Winkel zwischen Tangentialvektoren) hängen von der ersten Fundamentalform ab.

Gibt es nun eine lokale Isometrie zwischen S_1und S_2, so sind diese wegen der vorangegangenen Definition invariant unter dieser Abbildung.

“Kleine” offene Mengen $U \subset S_1$ können mit diesen Mitteln nicht von ihren Bildern $f(U) \subset S_2$ unterschieden werden.

Lokale Isometrien

Alle Größen, die innerhalb der Fläche “messbar” sind (z.B. Längen von Kurven, Winkel zwischen Tangentialvektoren) hängen von der ersten Fundamentalform ab.

Gibt es nun eine lokale Isometrie zwischen S_1und S_2, so sind diese wegen der vorangegangenen Definition invariant unter dieser Abbildung.

“Kleine” offene Mengen $U \subset S_1$ können mit diesen Mitteln nicht von ihren Bildern $f(U) \subset S_2$ unterschieden werden.

Lokale Isometrien

Alle Größen, die innerhalb der Fläche “messbar” sind (z.B. Längen von Kurven, Winkel zwischen Tangentialvektoren) hängen von der ersten Fundamentalform ab.

Gibt es nun eine lokale Isometrie zwischen S_1und S_2, so sind diese wegen der vorangegangenen Definition invariant unter dieser Abbildung.

“Kleine” offene Mengen $U \subset S_1$ können mit diesen Mitteln nicht von ihren Bildern $f(U) \subset S_2$ unterschieden werden.

Definition Isometrie

Eine lokale Isometrie $f : S_1 \to S_2$ die zusätzlich noch bijektiv ist, heißt **Isometrie**

Gibt es eine solche, so heißen S_1 und S_2 **isometrisch**.
Gilt das lokal für Umgebungen von Punkten auf S_1 und S_2 so heißen die Flächen **lokal isometrisch**

Definition Isometrie

Eine lokale Isometrie $f : S_1 \to S_2$ die zusätzlich noch bijektiv ist, heißt **Isometrie**

Gibt es eine solche, so heißen S_1 und S_2 **isometrisch**.
Gilt das lokal für Umgebungen von Punkten auf S_1 und S_2 so heißen die Flächen **lokal isometrisch**

Definition Isometrie

Eine lokale Isometrie $f : S_1 \to S_2$ die zusätzlich noch bijektiv ist, heißt **Isometrie**

Gibt es eine solche, so heißen S_1 und S_2 **isometrisch**.
Gilt das lokal für Umgebungen von Punkten auf S_1 und S_2 so heißen die Flächen **lokal isometrisch**

Was ist innere Geometrie?

Die innere Geometrie beschäftig sich mit diesen Größen, die unter lokalen Isometrien invariant sind.

Sei eine solche Größe durch die Funktion $F_{S_i} : S_i \to \mathbb{R}$ beschrieben,

dann bedeutet Invarianz gegenüber lokalen Isometrien $f : S_1 \to S_2$ einfach

$$F_{S_1} = F_{S_2} \circ f$$

Was ist innere Geometrie?

Die innere Geometrie beschäftig sich mit diesen Größen, die unter lokalen Isometrien invariant sind.

Sei eine solche Größe durch die Funktion $F_{S_i} : S_i \to \mathbb{R}$ beschrieben,

dann bedeutet Invarianz gegenüber lokalen Isometrien $f : S_1 \to S_2$ einfach

$$F_{S_1} = F_{S_2} \circ f$$

Was ist innere Geometrie?

Die innere Geometrie beschäftig sich mit diesen Größen, die unter lokalen Isometrien invariant sind.

Sei eine solche Größe durch die Funktion $F_{S_i} : S_i \to \mathbb{R}$ beschrieben,

dann bedeutet Invarianz gegenüber lokalen Isometrien $f : S_1 \to S_2$ einfach

$$F_{S_1} = F_{S_2} \circ f$$

Was ist innere Geometrie?

Die mittlere Krümmung H ist keine Größe der inneren Geometrie!.

Zylinder und Ebene sind lokal isometrisch, es müsste also dann für eine lokale Isometrie f gelten

$$H_{Zyl} = H_{Ebene} \circ f$$

Allerdings ist

$$\frac{1}{2} = H_{Zyl} \neq H_{Ebene} = 0!$$

Was ist innere Geometrie?

Die mittlere Krümmung H ist keine Größe der inneren Geometrie!.

Zylinder und Ebene sind lokal isometrisch, es müsste also dann für eine lokale Isometrie f gelten

$$H_{Zyl} = H_{Ebene} \circ f$$

Allerdings ist

$$\frac{1}{2} = H_{Zyl} \neq H_{Ebene} = 0!$$

Was ist innere Geometrie?

Die mittlere Krümmung H ist keine Größe der inneren Geometrie!.

Zylinder und Ebene sind lokal isometrisch, es müsste also dann für eine lokale Isometrie f gelten

$$H_{Zyl} = H_{Ebene} \circ f$$

Allerdings ist

$$\frac{1}{2} = H_{Zyl} \neq H_{Ebene} = 0! \quad `$$

Richtungsableitung - Kurven

Eine kleine Wiederholung: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$grad\, f(\xi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi)\right)$ für ein $\xi \in \mathbb{R}^3$.Dann ist die **Richtungsableitung** von f im Punkt ξ in Richtung v definiert als

$$D_v f(\xi) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overbrace{\xi + tv}^{:=c(t)}) - f(\xi)}{t} = \langle grad\, f(\xi), v \rangle \qquad (*)$$

Dabei ist $c(t)$ eine Gerade im Definitionsbereich von f mit $c(0) = \xi$ und $\dot{c}(0) = v$

Richtungsableitung - Kurven

Eine kleine Wiederholung: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$grad\, f(\xi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi)\right)$ für ein $\xi \in \mathbb{R}^3$.Dann ist die **Richtungsableitung** von f im Punkt ξ in Richtung v definiert als

$$D_v f(\xi) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overbrace{\xi + tv}^{:=c(t)}) - f(\xi)}{t} = \langle grad\, f(\xi), v \rangle \qquad (*)$$

Dabei ist $c(t)$ eine Gerade im Definitionsbereich von f mit $c(0) = \xi$ und $\dot{c}(0) = v$

Richtungsableitung - Kurven

Eine kleine Wiederholung: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $grad\, f(\xi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi)\right)$ für ein $\xi \in \mathbb{R}^3$.Dann ist die **Richtungsableitung** von f im Punkt ξ in Richtung v definiert als

$$D_v f(\xi) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overbrace{\xi + tv}^{:=c(t)}) - f(\xi)}{t} = \langle grad\, f(\xi), v \rangle \qquad (*)$$

Dabei ist $c(t)$ eine Gerade im Definitionsbereich von f mit $c(0) = \xi$ und $\dot{c}(0) = v$

Richtungsableitung auf regulären Flächen

Auf regulären Flächen ist das Differential einer Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in S$ definiert durch

$$d_p f : T_p S \to \overbrace{T_{f(p)}\mathbb{R}}^{=\mathbb{R}}$$

$$X_p \longmapsto d_p f(X_p) := \frac{d}{dt} f \circ c\Big|_{t=0} \quad (**)$$

Hier ist $c(t) : I \to S$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X_p$

Richtungsableitung auf regulären Flächen

Auf regulären Flächen ist das Differential einer Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in S$ definiert durch

$$d_p f : T_p S \to \overbrace{T_{f(p)}\mathbb{R}}^{=\mathbb{R}}$$

$$X_p \longmapsto d_p f(X_p) := \frac{d}{dt} f \circ c\big|_{t=0} \qquad (**)$$

Hier ist $c(t) : I \to S$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X_p$

Richtungsableitung auf regulären Flächen

Auf regulären Flächen ist das Differential einer Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in S$ definiert durch

$$d_p f : T_p S \to \overbrace{T_{f(p)}\mathbb{R}}^{=\mathbb{R}}$$

$$X_p \longmapsto d_p f(X_p) := \frac{d}{dt} f \circ c\Big|_{t=0} \qquad (**)$$

Hier ist $c(t) : I \to S$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X_p$

Richtungsableitung auf regulären Flächen

Die Kurven $c(t)$ spielen in $(*)$ und $(**)$ die selbe Rolle!

$(**)$ entspricht einer Richtungsableitung, diese gibt es aber jeweils nur in einem Punkt

Im nächsten schritt soll dies mit Hilfe des Begriffs Vektorfeld auf eine Formel für alle $p \in S$ erweitert werden.

Richtungsableitung auf regulären Flächen

Die Kurven $c(t)$ spielen in $(*)$ und $(**)$ die selbe Rolle!
$(**)$ entspricht einer Richtungsableitung, diese gibt es aber jeweils nur in einem Punkt

Im nächsten schritt soll dies mit Hilfe des Begriffs Vektorfeld auf eine Formel für alle $p \in S$ erweitert werden.

Richtungsableitung auf regulären Flächen

Die Kurven $c(t)$ spielen in $(*)$ und $(**)$ die selbe Rolle!
$(**)$ entspricht einer Richtungsableitung, diese gibt es aber jeweils nur in einem Punkt

Im nächsten schritt soll dies mit Hilfe des Begriffs Vektorfeld auf eine Formel für alle $p \in S$ erweitert werden.

Richtungsableitung und Vektorfelder

Lassen wir d_pf aus $(**)$ für alle $p \in S$ auf X_p wirken, so ergibt sich die **Richtungsableitung** von f nach X als

$$\partial_X f \;:\; S \to \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto \partial_X f(p) = \partial_{X_p} f = d_p f(X) \qquad (***)$$

Richtungsableitung und Vektorfelder

Lassen wir $d_p f$ aus $(**)$ für alle $p \in S$ auf X_p wirken, so ergibt sich die **Richtungsableitung** von f nach X als

$$\partial_X f \,:\, S \to \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto \partial_X f(p) = \partial_{X_p} f = d_p f(X) \quad (***)$$

Richtungsableitung und Vektorfelder

Lassen wir $d_p f$ aus $(**)$ für alle $p \in S$ auf X_p wirken, so ergibt sich die **Richtungsableitung** von f nach X als

$$\partial_X f \,:\, S \to \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto \partial_X f(p) = \partial_{X_p} f = d_p f(X) \qquad (***)$$

Richtungsableitung und Vektorfelder

$(***)$ entspricht einer Verallgemeinerung der rechten Seite von $(*)$ auf reguläre Flächen.
Für die Verallgemeinerung der linken Seite brauchen wir ein Skalarprodukt auf S. Wie bekommen wir das?

Richtungsableitung und Vektorfelder

$(***)$ entspricht einer Verallgemeinerung der rechten Seite von $(*)$ auf reguläre Flächen.
Für die Verallgemeinerung der linken Seite brauchen wir ein Skalarprodukt auf S. Wie bekommen wir das?

Richtungsableitung und Vektorfelder

Wir erhalten mit der ersten Fundamentalform also analog zu $(*)$

$$\partial_X f(p) := I_p(grad\, f(p), X(p)) \quad (\triangle)$$

I_p legt den Gradienten durch die positive Definitheit sogar schon eindeutig fest.

Richtungsableitung und Vektorfelder

Wir erhalten mit der ersten Fundamentalform also analog zu $(*)$

$$\partial_X f(p) := I_p(grad\, f(p), X(p)) \quad (\triangle)$$

I_p legt den Gradienten durch die positive Definitheit sogar schon eindeutig fest.

Gradient

Wie sieht nun *grad* $f(p)$ aus?

$$grad\ f = \sum_{j=1}^{2} \xi^j \frac{\partial F}{\partial u^j} \quad \text{mit} \quad \xi^j \circ F = \sum_{k=1}^{2} g^{jk} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}$$

Oder schlampig:

$$grad\ f = g^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

Im $\mathbb{R}^n$ fällt das gar nicht auf, die erste Fundamentalform ist dort ja die Einheitsmatrix!

Gradient

Wie sieht nun *grad* $f(p)$ aus?

$$grad\, f = \sum_{j=1}^{2} \xi^j \frac{\partial F}{\partial u^j} \quad \text{mit} \quad \xi^j \circ F = \sum_{k=1}^{2} g^{jk} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}$$

Oder schlampig:

$$grad\, f = g^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

Im $\mathbb{R}^n$ fällt das gar nicht auf, die erste Fundamentalform ist dort ja die Einheitsmatrix!

Gradient

Wie sieht nun *grad f* (p) aus?

$$grad\, f = \sum_{j=1}^{2} \xi^j \frac{\partial F}{\partial u^i} \quad \text{mit} \quad \xi^j \circ F = \sum_{k=1}^{2} g^{jk} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}$$

Oder schlampig:

$$grad\, f = g^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

Im $\mathbb{R}^n$ fällt das gar nicht auf, die erste Fundamentalform ist dort ja die Einheitsmatrix!

Neue Sichtweise

$(***)$ erlaubt es, aus einem Vektorfeld und einer Funktion eine neue Funktion zu erzeugen:

Das Vektorfeld X ordnet der Funktion f eine neue Funktion $\partial_X f$ zu.

$\partial_X f$ ist in jedem Punkt $p \in S$ die Richtungsableitung von f in Richtung X_p

Neue Sichtweise

$(***)$ erlaubt es, aus einem Vektorfeld und einer Funktion eine neue Funktion zu erzeugen:
Das Vektorfeld X ordnet der Funktion f eine neue Funktion $\partial_X f$ zu.
$\partial_X f$ ist in jedem Punkt $p \in S$ die Richtungsableitung von f in Richtung X_p

Neue Sichtweise

$(***)$ erlaubt es, aus einem Vektorfeld und einer Funktion eine neue Funktion zu erzeugen:
Das Vektorfeld X ordnet der Funktion f eine neue Funktion $\partial_X f$ zu.
$\partial_X f$ ist in jedem Punkt $p \in S$ die Richtungsableitung von f in Richtung X_p

Neue Sichtweise formal:

$X : S \to \mathbb{R}^3$, $X(p) \in T_pS$ wird zur Abbildung

$$X : C^\infty(S) \to C^\infty(S)$$

$$f \longmapsto X(f) = \partial_x f$$

Das erlaubt es aus Vektorfeldern neue Vektorfelder zu erzeugen. Dazu muss man nur angeben, was das neue Vektorfeld mit den Funktionen in C^∞ macht.

Neue Sichtweise formal:

$X : S \to \mathbb{R}^3$, $X(p) \in T_pS$ wird zur Abbildung

$$X : C^\infty(S) \to C^\infty(S)$$

$$f \longmapsto X(f) = \partial_x f$$

Das erlaubt es aus Vektorfeldern neue Vektorfelder zu erzeugen. Dazu muss man nur angeben, was das neue Vektorfeld mit den Funktionen in C^∞macht.

Definition

Seien X, Y Vektorfelder und $f \in C^\infty$, dann heißt $[X, Y]$ mit

$$\partial_{[X,Y]}(f) = \partial_Y(\partial_X f) - \partial_X(\partial_Y f)$$

Lie-Klammer von X mit Y. $[X, Y]$ ist damit wohldefiniert.
Wegen $f \in C^\infty$ ist offensichtlich auch $\partial_X f \in C^\infty$, damit kann Y daraus $\partial_Y(\partial_X f) \in C^\infty$ erzeugen.

Definition

Seien X, Y Vektorfelder und $f \in C^\infty$, dann heißt $[X, Y]$ mit

$$\partial_{[X,Y]}(f) = \partial_Y(\partial_X f) - \partial_X(\partial_Y f)$$

Lie-Klammer von X mit Y. $[X, Y]$ ist damit wohldefiniert.
Wegen $f \in C^\infty$ ist offensichtlich auch $\partial_X f \in C^\infty$, damit kann Y daraus $\partial_Y(\partial_X f) \in C^\infty$ erzeugen.

Warum ist [X,Y]$\neq$ 0?

$[X, Y]$ ist also die Differenz der zweiten Richtungsableitungen.

Sei S die $(x, y)-$Ebene, $X = e_1, \;\; Y = e_2$, dann gilt mit dem Satz von Schwarz $[X, Y] = 0$.

Wie sieht das allgemein aus?

Warum ist $[X,Y] \neq 0$?

$[X, Y]$ ist also die Differenz der zweiten Richtungsableitungen.

Sei S die $(x, y)-$Ebene, $X = e_1$, $Y = e_2$, dann gilt mit dem Satz von Schwarz $[X, Y] = 0$.

Wie sieht das allgemein aus?

Warum ist [X,Y]$\neq$ 0?

$[X, Y]$ ist also die Differenz der zweiten Richtungsableitungen.

Sei S die $(x, y)-$Ebene, $X = e_1, \;\; Y = e_2$, dann gilt mit dem Satz von Schwarz $[X, Y] = 0$.

Wie sieht das allgemein aus?

[X,Y] in einer lokalen Parametrisierung

Seien nun $X = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$, $Y = \sum_{j=1}^{2} \eta^j \frac{\partial F}{\partial u^j}$ mit einer lokalen Parametrisierung (U, F, V). Dann erfüllt die Lie-Klammer auch

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{2} \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial F}{\partial u^j}$$

Die Komponenten der Vektorfelder müssen also jeweils nach dem anderen Vektorfeld abgeleitet werden.
Weil im Allgemeinen ξ^i,η^i nicht konstant sind, ist damit i.A. auch$[X, Y] \neq 0$.

[X,Y] in einer lokalen Parametrisierung

Seien nun $X = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$, $Y = \sum_{j=1}^{2} \eta^j \frac{\partial F}{\partial u^j}$ mit einer lokalen Parametrisierung (U, F, V). Dann erfüllt die Lie-Klammer auch

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{2} \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial F}{\partial u^j}$$

Die Komponenten der Vektorfelder müssen also jeweils nach dem anderen Vektorfeld abgeleitet werden.

Weil im Allgemeinen ξ^i,η^i nicht konstant sind, ist damit i.A. auch $[X, Y] \neq 0$.

[X,Y] in einer lokalen Parametrisierung

Seien nun $X = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$, $Y = \sum_{j=1}^{2} \eta^j \frac{\partial F}{\partial u^j}$ mit einer lokalen Parametrisierung (U, F, V). Dann erfüllt die Lie-Klammer auch

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{2} \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial F}{\partial u^j}$$

Die Komponenten der Vektorfelder müssen also jeweils nach dem anderen Vektorfeld abgeleitet werden.
Weil im Allgemeinen ξ^i,η^i nicht konstant sind, ist damit i.A. auch$[X, Y] \neq 0$.

Was macht [X,Y] also?

$[X, Y]$ misst die Abweichung zwischen den zweiten Richtungsableitungen bei Vertauschen der Reihenfolge der Komponenten nach denen differenziert wird.

Anders gesagt ist $[X, Y]$ ein Maß dafür, wie weit sich X in Richtung Y (und umgekehrt) ändert, also die Unabhängigkeit der Richtungen.

Für Koordinatenfelder $\frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}$ gilt $\left[\frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}\right] = 0$. Diese sind ja in jedem T_pS über V eine Basis.

Was macht [X,Y] also?

$[X, Y]$ misst die Abweichung zwischen den zweiten Richtungsableitungen bei Vertauschen der Reihenfolge der Komponenten nach denen differenziert wird.

Anders gesagt ist $[X, Y]$ ein Maß dafür, wie weit sich X in Richtung Y (und umgekehrt) ändert, also die Unabhängigkeit der Richtungen.

Für Koordinatenfelder $\frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}$ gilt $\left[\frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}\right] = 0$. Diese sind ja in jedem T_pS über V eine Basis.

Was macht [X,Y] also?

$[X, Y]$ misst die Abweichung zwischen den zweiten Richtungsableitungen bei Vertauschen der Reihenfolge der Komponenten nach denen differenziert wird.

Anders gesagt ist $[X, Y]$ ein Maß dafür, wie weit sich X in Richtung Y (und umgekehrt) ändert, also die Unabhängigkeit der Richtungen.

Für Koordinatenfelder $\frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}$ gilt $\left[\frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}\right] = 0$. Diese sind ja in jedem T_pS über V eine Basis.