Elementare Differentialgeometrie
Geodäten

Präsentiert von Philipp und Alwin

Was bisher geschah ...

Definition 4.5.1. Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g. Sei $c : I \to S$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist die *Länge* von c (bzgl. (S, g)) definiert durch

$$L[c] := \int_I \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}dt.$$

Definition 4.5.2. Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g. Sei $c : I \to S$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist die *Energie* von c (bzgl. (S, g)) definiert durch

$$E[c] := \frac{1}{2} \int_I g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))dt.$$

Was bisher geschah …

„Rote-Ampel-Lemma:

Lemma 4.5.3. *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g. Sei $c : [a, b] \to S$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist*

$$L[c]^2 \leq 2(b-a)E[c],$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, d. h. wenn

$$g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \equiv \text{ const.}$$

Variation der Energie

Satz 4.5.5 (Variation der Energie). *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g. Seien $p, q \in S$. Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to S$ eine glatte Abbildung, so dass für $c_s : [a, b] \to S$, $c_s(t) := c(s, t)$, gilt*

$$c_s(a) = p, \quad c_s(b) = q.$$

Sei $V(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)$ das so genannte Variationsvektorfeld. Dann gilt:

$$\frac{d}{ds} E[c_s]\Big|_{s=0} = -\int_a^b g_{c_0(t)}\left(V(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}_0(t)\right) dt.$$

WAS BISHER GESCHAH …

Korollar 4.5.6. *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g. Seien $p, q \in S$. Ist $c : [a, b] \to S$ eine Verbindungskurve von p nach q mit minimaler Energie, so gilt*

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}_0(t) = 0$$

für alle $t \in [a, b]$.

DEFINITION: GEODÄTISCHE

Definition 4.5.7. Sei S eine reguläre Fläche, I ein Intervall. Eine parametrisierte Kurve $c : I \to S$ heißt *Geodätische*, falls

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = 0$$

für alle $t \in I$ gilt.

Was bisher geschah ...

Bislang wissen wir über Geodätische somit Folgendes:

energieminimierend

$\Updownarrow$

längenminimierend und
proportional zur Bogenlänge parametrisiert

$\Downarrow$

Geodätische

$\Downarrow$

proportional zur Bogenlänge parametrisiert

Rückblick kovariante Ableitung

Nun zur lokalen Formel für die kovariante Ableitung. Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung der regulären Fläche S. Sei $c : I \to S$ eine parametrisierte Kurve. Mit den durch die Parametrisierung gegebenen Koordinaten können wir natürlich nur den Teil der Kurve c behandeln, der in V verläuft. Nach eventueller Verkleinerung von I nehmen wir also an, dass $c(I) \subset V$. Jetzt können wir $\tilde{c} := F^{-1} \circ c : I \to U$ bilden. Sei $v : I \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld an S längs c. Wir drücken v in der durch die Parametrisierung gegebenen Basis aus,

$$v(t) = \xi^1(t)\frac{\partial F}{\partial u^1}(\tilde{c}(t)) + \xi^2(t)\frac{\partial F}{\partial u^2}(\tilde{c}(t)).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}v(t) &= \Pi_{c(t)}\left(\dot{v}(t)\right) \\
&= \Pi_{c(t)}\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\dot{\xi}^i(t)\frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \xi^i(t)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(\tilde{c}(t))\dot{\tilde{c}}^j(t)\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\dot{\xi}^i(t)\frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t))\xi^i(t)\dot{\tilde{c}}^j(t)\frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)) \\
&= \sum_{k=1}^{2}\left(\dot{\xi}^k(t) + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t))\xi^i(t)\dot{\tilde{c}}^j(t)\right)\frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)). \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Existenz & Eindeutigkeit von Geodäten

Um herauszufinden, wie viele Geodätische es auf einer regulären Fläche gibt, untersuchen wir die Geodätengleichung bzgl. einer lokalen Parametrisierung. Für eine lokale Parametrisierung (U, F, V) und eine Kurve c schreiben wir, wo definiert, $u := F^{-1} \circ c$, d. h. $c = F \circ u$. Die Geodätengleichung lautet dann

$$0 = \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = \sum_k \left(\ddot{u}^k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(u(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}(u(t)).$$

Die Geodätengleichung ist genau dann erfüllt, wenn

$$\ddot{u}^k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(u(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) = 0, \qquad (4.10)$$

Existenz & Eindeutigkeit von Geodäten

$$\ddot{u}^k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(u(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) = 0, \qquad (4.10)$$

Es handelt sich um ein System von zwei gekoppelten nichtlinearen autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Satz von Clairaut

Satz 4.5.13 (Clairaut). *Sei S eine Drehfläche, gegeben durch die Parametrisierung $F(t,\varphi) = (r(t)\cos(\varphi), r(t)\sin(\varphi), t)^\top$. Wir nehmen die erste Fundamentalform als riemannsche Metrik. Sei $c : I \to S$ eine Geodätische, $c(t) = F(r(t), \varphi(t))$. Sei $\theta(t)$ der Winkel zwischen $\dot{c}(t)$ und dem Breitenkreis durch $c(t)$. Dann ist*

$$r(t)\cos(\theta(t)) = \textit{const.}$$

Geodätische Krümmung

Sei S eine orientierte reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g. Sei $c : I \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei $n : I \to \mathbb{R}^3$ das Einheitsnormalenfeld längs c, das $\dot{c}$ zu positiv orientierten Orthonormalbasen ergänzt, d. h. für jedes $t \in I$ ist $(\dot{c}(t), n(t))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $T_{c(t)}S$. Wie bei ebenen Kurven sieht man durch Differentiation der Funktion $t \mapsto g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$, dass $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)$ senkrecht auf $\dot{c}(t)$ steht. Es gibt also eine eindeutige Funktion $\kappa_g : I \to \mathbb{R}$, derart dass

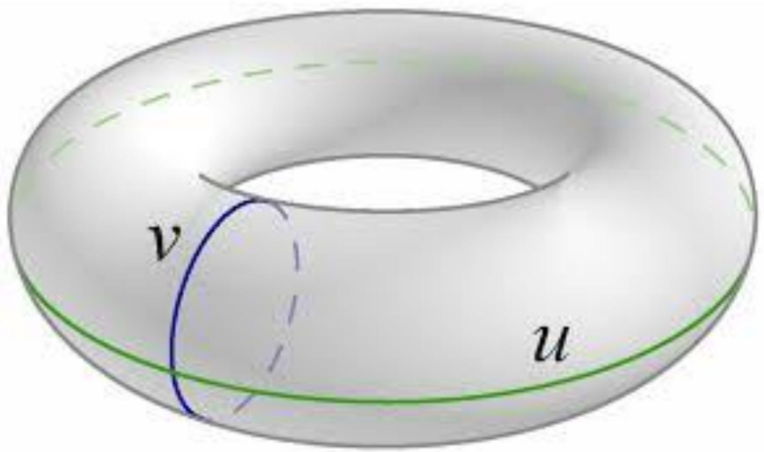
$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = \kappa_g(t) \cdot n(t).$$

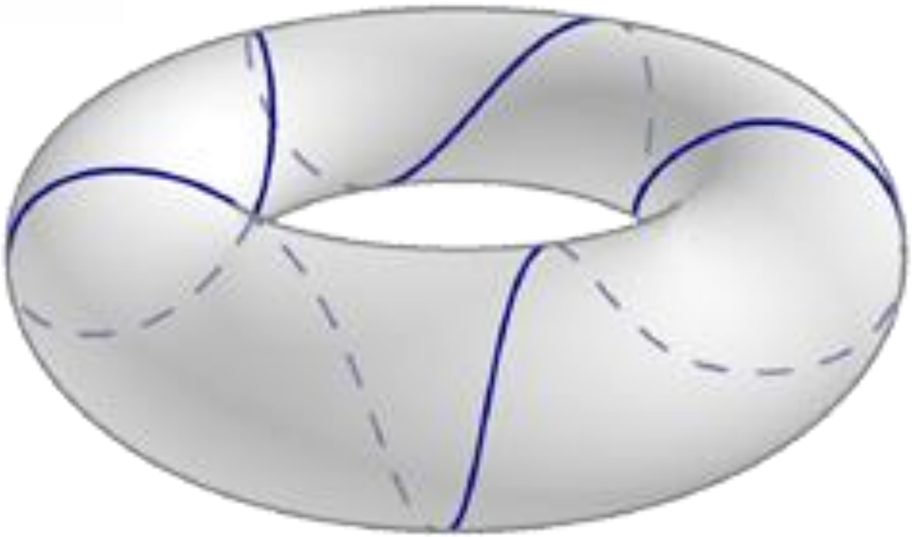
Definition 4.5.14. Die Funktion κ_g heißt *geodätische Krümmung* von c in S bzgl. g.

Aus der Definition ist klar, dass c genau dann eine Geodätische ist, wenn $\kappa_g \equiv 0$. Die geodätische Krümmung verallgemeinert die Krümmung ebener Kurven. Ist nämlich S die x-y-Ebene mit der ersten Fundamentalform als riemannscher Metrik, so ist κ_g gerade die Krümmung von c, aufgefasst als ebene Kurve.

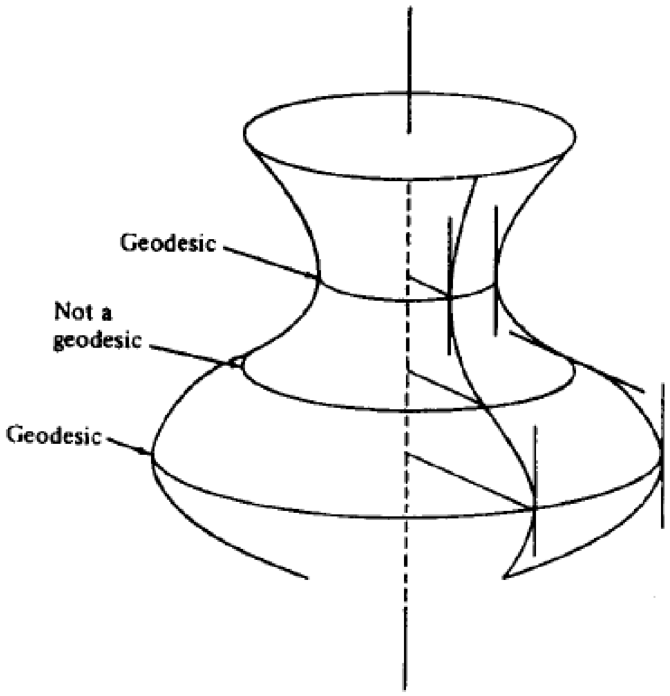
Geodäten auf der Sphäre:
Großkreise

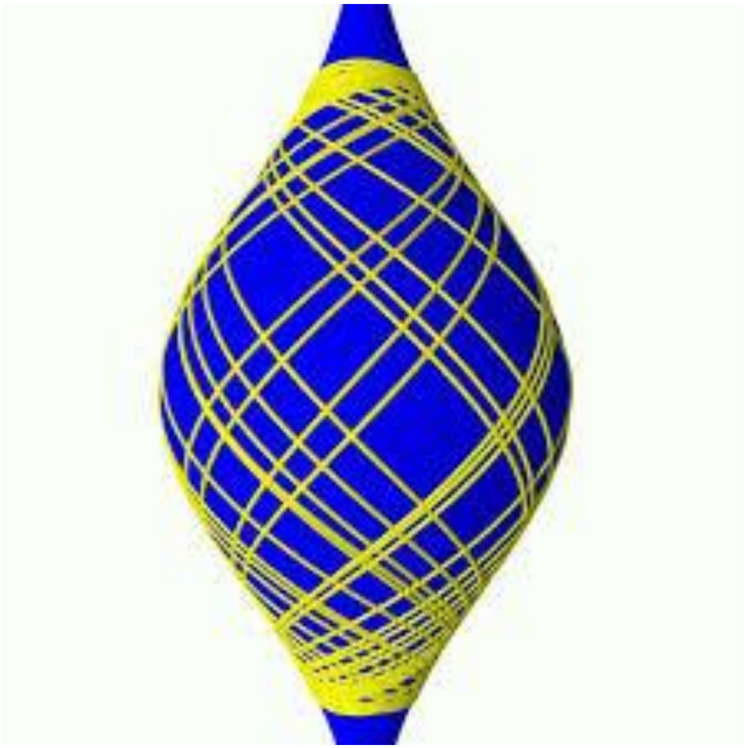
Geodäten am Torus



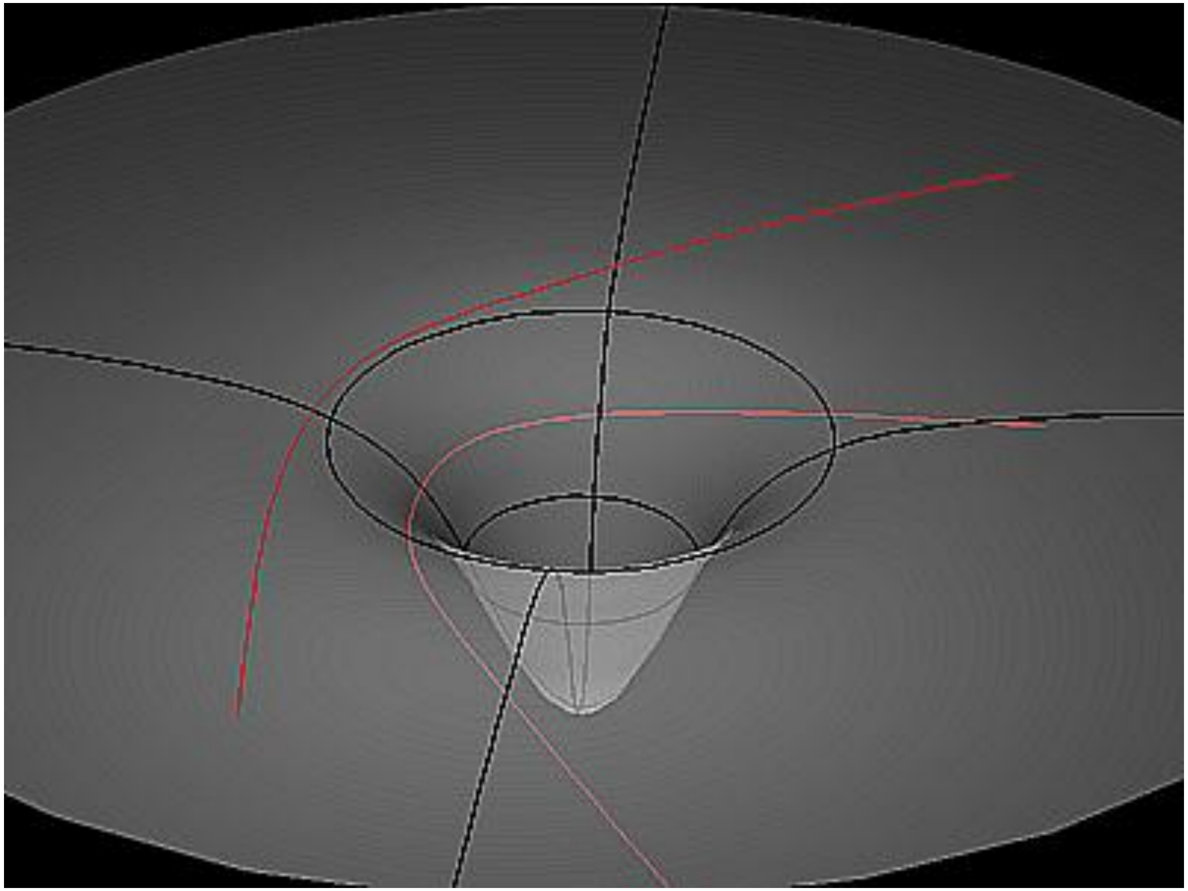


Geodäten auf einer Drehfläche





Geodätische in einem zweidimensionalen, gekrümmten Raum, der in einen dreidimensionalen Raum eingebettet ist. (Modellierung der Gravitation über die Geodäten in der Relativitätstheorie)



Danke für Eure Aufmerksamkeit