Nachname:
Vorname:
Matrikelnr:

1	2	3	4	$\sum$	Note

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

WS 2018/19, R. Steinbauer, E. Süss-Stepancik

2. Termin, 27.2.2019

GRUPPE $\boxed{\textbf{B}}$

1 Faktenwissen zur Schulmathematik Analysis

Kreuzen Sie für jede Antwortmöglichkeit an, ob Sie diese für richtig (R) oder falsch (F) bzw. zutreffend halten. (Je 1 Punkt pro richtiger Antwort.)

1.1. Jede beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Supremum. (R) (F)

1.2. Es gibt injektive Funktionen, die nicht bijektiv sind. (R) (F)

1.3. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$. (R) (F)

1.4. Jede konvergente (reelle) Folge hat einen Häufungswert. (R) (F)

1.5. Jede differenzierbar Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. (R) (F)

1.6. Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit überall positiver Ableitung ist streng monoton steigend. (R) (F)

1.7. Liegen unendlich viele Glieder der (reellen) Folge (x_n) in jeder ε-Umgebung von a, dann ist a Grenzwert der Folge (x_n). (R) (F)

1.8. Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine Facette des Begriffs, mit dem dieser fachlich beschrieben wird. (R) (F)

1.9. Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, \infty))$ ist stetig auf $[0, \infty)$. (R) (F)

1.10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert. (R) (F)

1.11. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Der Ausdruck $\int_a^b f(t)\, dt$ ist eine . (1) Funktion (2) Zahl.

1.12. Die Betragsfunktion $|x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist differenzierbar auf $(0, \infty)$. (R) (F)

1.13. Hat eine (reelle) Folge einen Limes, dann hat sie auch einen Häufungswert. (R) (F)

1.14. Für je zwei Stammfunktionen F und G der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $F(x) - G(x) = Cx$, wobei C eine Konstante ist. (R) (F)

1.15. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sicher) nicht differenzierbar, wenn ihr Graph einen Sprung hat. (R) (F)

1.16. Sei t die Tangente an eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0, f(0))$. Dann gilt für den Fehler

$$r(h) := f(h) - t(h) \to 0 \quad (h \to 0).$$

(R) (F)

1.17. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x - x_0| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

(R) (F)

1.18. Für jede Stammfunktion G der stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt \; + \; C,$$

wobei C eine Konstante ist. (R) (F)

1.19. $\lim_{n\to\infty} \frac{n-n^2}{n} = 1.$ (R) (F)

1.20. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls die Ober- und die Untersummen konvergieren. (R) (F)

2 Offene Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

2.1. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*

(a) Formulieren Sie beide Teile des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. (2P)

(b) Geben Sie eine Beweisskizze des ersten Teils. (3P)

2.2. *Die Tangente als beste Gerade.* Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Wie lautet die Gleichung der Tangente t an f im Punkt $(1, f(1))$? (1P)

(b) Zeigen Sie, dass die Tangente t aus (a) die einzige Gerade durch den Punkt $(1, f(1))$ ist, für die (sogar) für den relativen Fehler

$$\frac{r(h)}{h} := \frac{f(1+h) - t(1+h)}{h} \;\to\; 0 \quad (h \to 0)$$

gilt. Fertigen Sie eine Skizze der Situation an. (4P)

2.3. *Funktion oder nicht.* Geben Sie mittels Pfeildiagramm eine Zuordnung zwischen endlichen Mengen an, die keine Funktion ist und eine, die (schon) eine Funktion ist. (2P)

3 Offene Aufgaben zur Unterrichtspraxis

3.1. *Unterrichtssequenz.* Betrachten Sie das folgende Schülerinnengespräch:

Frida und Antonia (7. Klasse AHS) bearbeiten einen Arbeitsauftrag, bei dem es um die Herleitung der Momentangeschwindigkeit aus der mittleren Geschwindigkeit eines frei fallenden Balles geht.

Hinweis: Jeder frei auf die Erde fallende Gegenstand der zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen wird, folgt der Weg-Zeit-Funktion $s(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2$. Dabei ist g die Erdbeschleunigung, die wir der Einfachheit halber grob mit dem Wert 10 annehmen. (Der wahre Wert ist etwa $9,81\ ms^{-2}$. Ignorieren Sie im Folgenden die Problematik der physikalischen Einheiten.)

Frida: Wir sollen die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0;3]$ *ausrechnen.*
Antonia: Na, da müssen wir rechnen (schreibt auf und spricht dazu):

$$\frac{s(3) - s(0)}{3 - 0} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2}{3} = 15\ m/s.$$

Frida: Aja. Und jetzt im Intervall $[2;3]$ *und dann im Intervall* $[2,9;3]$ *. Das geht ja genauso.*
Antonia: Hm. (liest vom Arbeitsblatt) „Wie könnte man die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 3$ *Sekunden ausrechnen?“*
Mh? Muss man da jetzt zweimal 3 einsetzen? (rechnet)
Das ist ja blöd, da kommt $\frac{0}{0}$ *raus. Das geht gar nicht.*
Frida: Na, eh klar. Zu einem Zeitpunkt bewegt sich der Ball ja nicht. Wie bei einem Foto halt.
Lehrer: Seid ihr fertig?

Bearbeiten Sie nun die folgenden Punkte:

(a) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeiten in den Intervallen $[2;3]$ und $[2,9;3]$. (1P)

(b) Analysieren Sie die obige Szene: Was machen die Schülerinnen richtig, was machen sie falsch und wo liegen ihre Verständnisprobleme? (3P)

(c) Wie würden Sie als Lehrer/in lernförderlich auf die Situation reagieren? Begründen Sie! (3P)

Bitte umblättern!

3.2. *Prinzip der Variation.* Beschreiben Sie das Prinzip der Variation im Allgemeinen. Geben Sie eine (ausreichende) Anzahl Aufgabenstellungen an, die diesem Prinzip entsprechend geeignet ist, den Begriff der geometrischen Folge zu erarbeiten. Geben Sie auch eine entsprechende Lösungserwartung an. (5P)

4 Offene Aufgaben: Fachdidaktische Reflexionen

4.1. *Schmiegegerade vs. Tangente.* Diskutieren Sie die Begriffe Schmiegegerade und Tangente im Kontext des Zugangs zum Ableitungsbegriff über das Tangentenproblem. Gehen Sie dabei insbesondere auf den meist stillschweigend vollzogegen Paradigmenwechsel zwischen geometrischem und analytischem Tangentenbegriff ein. (3P)

4.2. *Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff.*

(a) Was versteht man in der Fachdidaktik unter einer Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff? Wie verhalten sich Aspekte unf Grundvorstellungen zueinander? (2P)

(b) Geben Sie alle Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriffs an und beschreiben Sie diese und ihre respektiven Zusammenhänge möglichst prägnant. (5P)

4.3. *Zum Folgenbegriff.*

(a) Definieren Sie den Begriff (reelle) Folge. (1P)

(b) Beschreiben Sie kurz und bündig die drei Aspekte des Folgenbegriffs. Welchen Aspekt verwendet die obige Definition? (3P)

(c) Welcher Aspekt bietet sich Ihrer Ansicht nach besonders gut an, den Folgebegriff im Unterricht einzuführen? Begründen Sie! (2P)