Nachname:
Vorname:
Matrikelnr:

1	2	3	4	$\sum$	Note

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

WS 2018/19, R. Steinbauer, E. Süss-Stepancik

3. Termin, 25.4.2019

GRUPPE $\boxed{\textbf{B}}$

1 Faktenwissen zur Schulmathematik Analysis

Kreuzen Sie für jede Antwortmöglichkeit an, ob Sie diese für richtig (R) oder falsch (F) bzw. zutreffend halten. (Je 1 Punkt pro richtiger Antwort.)

1.1. Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

eine stetig diffferenzierbare Funktion. (R) (F)

1.2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sicher) nicht differenzierbar, wenn

(a) ihr Graph einen Sprung hat. (R) (F)

(b) ihr Graph einen Knick hat. (R) (F)

1.3. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Der Ausdruck $\int_a^x f(x)\,dx$ ist sinnvoll. (R) (F)

1.4. Für eine (reelle) Folge gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,
falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad |x_n - a| < \varepsilon$ (R) (F)

1.5. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar,
falls die Ober- und die Untersummen konvergieren. (R) (F)

1.6. Es gibt injektive Funktionen, die nicht surjektiv sind. (R) (F)

1.7. Die Folge $\langle 2, 4, 8, 16, \ldots \rangle$ ist eine
. (1) arithmetische Folge (2) geometrische Folge.

1.8. Jede nach oben beschränkte und
nicht leere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Supremum. (R) (F)

1.9. Jede beschränkte (reelle) Folge konvergiert. (R) (F)

1.10. Hat eine (reelle) Folge zwei verschiedene Häufungswerte,
dann konvergiert sie nicht. (R) (F)

1.11. Hat eine (reelle) Folge einen Häufungswert,
dann konvergiert sie auch. (R) (F)

1.12. Rationale Funktionen sind auf
ihrem ganzen Definitionsbereich differenzierbar. (R) (F)

1.13. Welche der folgenden Schreibweisen für den Limes einer Folge ist korrekt:
$\lim_{n\to\infty} x_n \to a$ (J) (N)
$x_n \to a \quad (n \to \infty)$ (J) (N)

1.14. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$
gegen der Wert $c \in \mathbb{R}$, falls
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \geq \delta \implies |f(x) - c| < \varepsilon.$ (R) (F)

1.15. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für jede Gerade g durch den Punkt $(0, f(0))$ gilt

$$r(h) := f(h) - g(h) \ \to \ 0 \quad (h \to 0).$$

(R) (F)

1.16. Für jede Stammfunktion G der stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$G(x) = \int_0^x f(t)\, dt \ + \ C$$

wobei C eine Konstante ist. (R) (F)

1.17. Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, \infty))$
ist stetig auf $[0, \infty)$. (R) (F)

1.18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert. (R) (F)

2 Offene Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

2.1. *Differentialrechnung.*

(a) Definieren Sie für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den Begriff *Differenzenquotient* in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. (1P)

(b) Zeigen Sie direkt aus der Definition, dass die Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $x_0 = 0$ die Ableitung $f'(0) = 0$ besitzt. (1P)

(c) Diskutieren Sie ausführlich die (Nicht-)Differenzierbarkeit der Funktion $f(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$. Geben Sie auch eine graphische Interpretation. (2P)

2.2. *Funktion.*

(a) Definieren Sie den Begriff des Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (1P)

(b) Erklären Sie, was der Graph einer Funktion $f : A \to B$ mit einer Wertetabelle zu tun hat. (1P)

(c) Geben Sie eine Definition des Funktionsbegriffs mittels des (hier in der Luft liegenden) Paarmengenaspekts. (2P)

2.3. *Differential- und Integralrechnung.*

(a) Formulieren Sie beide Teile des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. (2P)

(b) Definieren Sie den Begriff Stammfunktion und zeigen Sie die folgende Aussage: Ist F Stammfunktion von f, dann auch jede Funktion G mit $G(x) = F(x) + C$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. (2P)

3 Offene Aufgaben zur Unterrichtspraxis

3.1. *Definitionsbereich.* Betrachten Sie die folgende Schulbuch-Aufgabe:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{-7}{x^2+4}$. *Bestimme den Definitionsbereich.*

(a) Wie lautet Ihre Lösung der Aufgabe? Bewerten Sie diese Aufgabe. (2P)

(b) Bringen Sie diese Aufgabe in eine sinnvollere Form. Erklären Sie, welche Kenntnisse Sie damit abfragen wollen. (2P)

3.2. *SchülerInnenäußerung.* Betrachten Sie die folgende Äußerung der Schülerin Mira (9. Schulstufe):

> Er fragte uns plötzlich, ob $0,\bar{9}$ nicht auch ein Name für 1 wäre, denn zu 1 passt ja auch 1/1 oder 3/3, 5/5, oder $1,0$. Ich protestierte natürlich, denn von $0,\bar{9}$ zu 1 fehlt ja noch die Zahl $0,\bar{0}1$. Zwar darf man in der Mathematik $0,000001$ nicht als $0,\bar{0}1$ schreiben, aber wie soll es denn sonst kurz heißen. Ich bin ja nicht Albert Einstein, aber mein (noch) gesunder Menschenverstand sagt mir, dass es zwischen $0,\bar{9}$ und 1 ein winziges Stückchen gibt. Dieses Stückchen verkleinert sich natürlich wenn $0,999$ zu $0,9999$ wird. Es wird von 0.001 zu 0.0001 kleiner, also: Es ist immer noch da. Und so ist es auch mit einer tausendstelligen Zahl, ein kleines Stück fehlt immer.

Bearbeiten Sie nun die folgenden Punkte:

(a) Gilt $0,\bar{9} = 1$ oder nicht? (1P)

(b) Begründen Sie Ihre obige Antwort. (2P)

(c) Verfassen Sie eine Antwort an Mira, in der Sie auf die Definition periodischer Dezimalzahlen eingehen (2P) und die Konsequenzen von $0,\bar{9} < 1$ darstellen. (3P)

4 Offene Aufgaben: Fachdidaktische Reflexionen

4.1. *Ableitungsregel für zusammengesetzte Funktionen im Unterricht erarbeiten.* Entwerfen Sie für die Summenregel der Ableitung einen konkreten Unterrichtsgang gemäß der Schrittfolge:

(a) Erkunden des Phänomens (2P)

(b) Herausarbeiten einer Vermutung (2P)

(c) Beweisnotwendigkeit der Vermutung (1P)

4.2. *Grundvorstellungen.*

(a) Was versteht man in der Fachdidaktik unter einer Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff? (1P)

(b) Geben Sie alle Grundvorstellungen zum Begriff Funktion an und beschreiben Sie diese möglichst prägnant. (3P)

(c) Eine der vier Grundvorstellungen zur Differenzialrechnung zielt auf die lokale Änderungsrate ab.

- Geben Sie diese Grundvorstellung an! (1P)
- Beschreiben Sie, wie diese Grundvorstellung im Laufe der Sekundarstufe 2 aufgebaut werden kann und berücksichtigen Sie dabei Lehrplaninhalte und entsprechende Grundkompetenzen aus dem SRP-Konzept. (3P)

4.3. *Grenzwert-Präzisierung.* Diskutieren Sie die Notwendigkeit, den Grenzwertbegriff für Folgen zu präzisieren — vor allem im Hinblick auf intuitive Beispiele, wo Konvergenz vorzuliegen scheint, tatsächlich aber *nicht* vorliegt. (3P)