Nachname:
Vorname:
Matrikelnr:

1	2	3	4	$\sum$	Note

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

WS 2018/19, R. Steinbauer, E. Süss-Stepancik

5. Termin, 19.12.2019

GRUPPE $\boxed{\mathbf{A}}$

1 Faktenwissen zur Schulmathematik Analysis

Kreuzen Sie für jede Antwortmöglichkeit an, ob Sie diese für richtig (R) oder falsch (F) bzw. zutreffend halten. (Je 1 Punkt pro richtiger Antwort.)

1.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sicher) unstetig, wenn

(a) ihr Graph einen Knick hat. (R) (F)

(b) sie ihr Monotonieverhalten sprunghaft ändert. (R) (F)

1.2. Jede nach oben beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ hat

(a) eine obere Schranke. (R) (F)

(b) hat ein Supremum. (R) (F)

1.3. Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

(a) f stetig $\Rightarrow$ f differenzierbar (R) (F)

(b) f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig (R) (F)

1.4. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls $a_k \to 0$. (R) (F)

1.5. Eine gültige Schreibweise für die erste Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x).$$

(R) (F)

1.6. Die Folge $a_n = \frac{-1}{n}$ $(n \geq 1)$ ist

(a) monoton wachsend (R) (F)

(b) beschränkt (R) (F)

1.7. Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungswert. (R) (F)

1.8. Eine streng monoton wachsende differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat überall eine positive Ableitung. (R) (F)

1.9. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sicher) nicht differenzierbar, wenn

(a) ihr Graph einen Sprung hat. (R) (F)

(b) ihr Graph einen Knick hat. (R) (F)

1.10. Auch eine (reelle) Folge mit zwei verschiedenen Häufungswerten kann konvergieren. (R) (F)

1.11. Liegen unendlich viele Glieder der (reellen) Folge (x_n) in jeder ε-Umgebung von a, dann ist a Grenzwert der Folge (x_n). (R) (F)

1.12. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Der Ausdruck $\int_a^b f(t)\,dt$ ist eine

(1) Funktion (2) Zahl.

1.13. Die Betragsfunktion $|x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist differenzierbar auf $(0, \infty)$. (R) (F)

1.14. Die Folge $a_n = \frac{1+2n}{2(n+n^2)}$ ist eine Nullfolge . (R) (F)

1.15. Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt. (R) (F)

2 Offene Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

2.1. *Differentialrechnung*

(a) Definieren Sie mathematisch exakt den Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. (1P)

(b) Betrachten Sie die Wurzelfunktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Berechnen Sie direkt aus der (obigen) Definition die Ableitung von f auf $(0, \infty)$ und zeigen Sie (ebenso aus der Definition) die Nichtdifferenzierbarkeit von f in $x_0 = 0$. (3P)

2.2. *Rekursive und explizite Darstellung von Folgen.*

Die Folge (x_n) ist gegeben durch die rekursive Darstellung

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \qquad \text{und} \quad x_0 = 1.$$

Leiten Sie die explizite Darstellung der Folge (x_n) her und berechnen Sie damit das Folgenglied x_5. (4P)

2.3. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*
Formulieren Sie mathematisch exakt den ersten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (1P) und geben Sie eine Beweisskizze. (3P)

3 Offene Aufgaben zur Unterrichtspraxis

3.1. *Kovariationsvorstellung.* Erklären Sie kurz und bündig aber unter Einbeziehung graphischer Darstellungen, was unter der Kovariationsvorstellung des Funktionsbegriffs verstanden wird. Welche Rolle kann dieser bei der Erarbeitung der Differenzierbarkeit spielen? Diskutieren Sie! (3P)

3.2. *SchülerInnenäußerung.* Betrachten Sie die folgende Äußerung der Schülerin Mira (9. Schulstufe):

> Er fragte uns plötzlich, ob $0,\bar{9}$ nicht auch ein Name für 1 wäre, denn zu 1 passt ja auch $1/1$ oder $3/3$, $5/5$, oder $1,0$. Ich protestierte natürlich, denn von $0,\bar{9}$ zu 1 fehlt ja noch die Zahl $0,\bar{0}1$. Zwar darf man in der Mathematik $0,000001$ nicht als $0,\bar{0}1$ schreiben, aber wie soll es denn sonst kurz heißen. Ich bin ja nicht Albert Einstein, aber mein (noch) gesunder Menschenverstand sagt mir, dass es zwischen $0,\bar{9}$ und 1 ein winziges Stückchen gibt. Dieses Stückchen verkleinert sich natürlich wenn $0,999$ zu $0,9999$ wird. Es wird von 0.001 zu 0.0001 kleiner, also: Es ist immer noch da. Und so ist es auch mit einer tausendstelligen Zahl, ein kleines Stück fehlt immer.

Bearbeiten Sie nun die folgenden Punkte:

(a) Gilt $0,\bar{9} = 1$ oder nicht? (1P)

(b) Begründen Sie Ihre obige Antwort. (2P)

(c) Verfassen Sie eine Antwort an Mira, in der Sie auf die Definition periodischer Dezimalzahlen eingehen (2P) und die Konsequenzen von $0,\bar{9} < 1$ darstellen. (3P)

3.3. *Prinzip des Kontrasts.*
Beschreiben Sie das Prinzip des Kontrasts im Allgemeinen. Arbeiten Sie eine Aufgabenstellung zur Erarbeitung des Begriffs der geometrischen Folge aus, die auf dem *Prinzip des Kontrasts* beruht und erstellen Sie eine entsprechende Lösungserwartung. (5P)

4 Offene Aufgaben: Fachdidaktische Reflexionen

4.1. *Aspekte & Grundvorstellungen.*

(a) Was versteht man in der Fachdidaktik unter einem Aspekt eines mathematischen Begriffs, was unter einer Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff? Wie verhalten sich Aspekte und Grundvorstellungen zueinander? (2P)

(b) Eine der vier Grundvorstellungen zur Differenzialrechnung zielt auf die lokale Änderungsrate ab.

Geben Sie diese Grundvorstellung an (1P) und beschreiben Sie, wie diese Grundvorstellung im Laufe der Sekundarstufe 2 aufgebaut werden kann und berücksichtigen Sie dabei Lehrplaninhalte und entsprechende Grundkompetenzen aus dem SRP-Konzept. (3P)

4.2. *Schmiegegerade vs. Tangente.*
Diskutieren Sie die Begriffe Schmiegegerade und Tangente im Kontext des Zugangs zum Ableitungsbegriff über das Tangentenproblem. Gehen Sie dabei insbesondere auf den meist stillschweigend vollzogegen Paradigmenwechsel zwischen geometrischem und analytischem Tangentenbegriff ein. (3P)

4.3. *Grunderfahrungen.*
Beschreiben Sie die drei Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts nach Winter. (3P)