Ausarbeitung

Prüfung zu
Schulmathematik Analysis
WS 2018/19, R. Steinbauer, E. Süss-Stepancik
2. Termin, 27.2.2019
GRUPPEN $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$[1]

1 Faktenwissen zur Schulmathematik Analysis

Kreuzen Sie für jede Antwortmöglichkeit an, ob Sie diese für richtig (R) oder falsch (F) bzw. zutreffend halten. (Je 1 Punkt pro richtiger Antwort.)

1.1.	Es gibt injektive Funktionen, die nicht bijektiv sind.	(R)	(F)
1.2.	Jede differenzierbar Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.	(R)	(F)
1.3.	Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine Facette des Begriffs, mit dem dieser fachlich beschrieben wird.	(R)	(F)
1.4.	Jede beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Supremum.	(R)	(F)
1.5.	Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit überall positiver Ableitung ist streng monoton steigend.	(R)	(F)
1.6.	Liegen unendlich viele Glieder der (reellen) Folge (x_n) in jeder ε-Umgebung von a, dann ist a Grenzwert der Folge (x_n).	(R)	(F)
1.7.	$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.	(R)	(F)
1.8.	Jede konvergente (reelle) Folge hat einen Häufungswert.	(R)	(F)
1.9.	Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, \infty))$ ist stetig auf $[0, \infty)$.	(R)	(F)
1.10.	Hat eine (reelle) Folge einen Limes, dann hat sie auch einen Häufungswert.	(R)	(F)
1.11.	Für je zwei Stammfunktionen F und G der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $F(x) - G(x) = Cx$, wobei C eine Konstante ist.	(R)	(F)
1.12.	Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sicher) nicht differenzierbar, wenn ihr Graph einen Sprung hat.	(R)	(F)

[1]Diese Ausarbeitung folgt der Nummerierung der Gruppe A. Bei Gruppe B sind die Aufgaben permutiert.

1.13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert. (R) ~~(F)~~

1.14. Sei t die Tangente an eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0, f(0))$. Dann gilt für den Fehler

$$r(h) := f(h) - t(h) \to 0 \quad (h \to 0).$$

~~(R)~~ (F)

1.15. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Der Ausdruck $\int_a^b f(t)\, dt$ ist eine .
(1) Funktion ~~(2)~~ Zahl.

1.16. Die Betragsfunktion $|x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist differenzierbar auf $(0, \infty)$. ~~(R)~~ (F)

1.17. Für jede Stammfunktion G der stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$G(x) = \int_0^x f(t)\, dt \; + \; C,$$

wobei C eine Konstante ist. ~~(R)~~ (F)

1.18. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls die Ober- und die Untersummen konvergieren. (R) ~~(F)~~

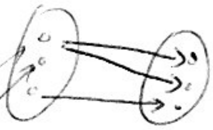
1.19. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x - x_0| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

~~(R)~~ (F)

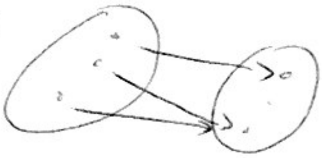
1.20. $\lim_{n\to\infty} \frac{n-n^2}{n} = 1.$ (R) ~~(F)~~

$\boxed{2.1}$ keine Funktion $\longrightarrow$



keine Zuordnung
doppelte Zuordnung

eine Fkt $\longrightarrow$



$\boxed{2.2}$ (a) $t(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$

(b) Sei g eine Gerade durch $(1, f(1))$, dann gilt $g(x) = f(1) + c\cdot(x-1)$ (mit c dem Anstieg von g). Es gilt dann

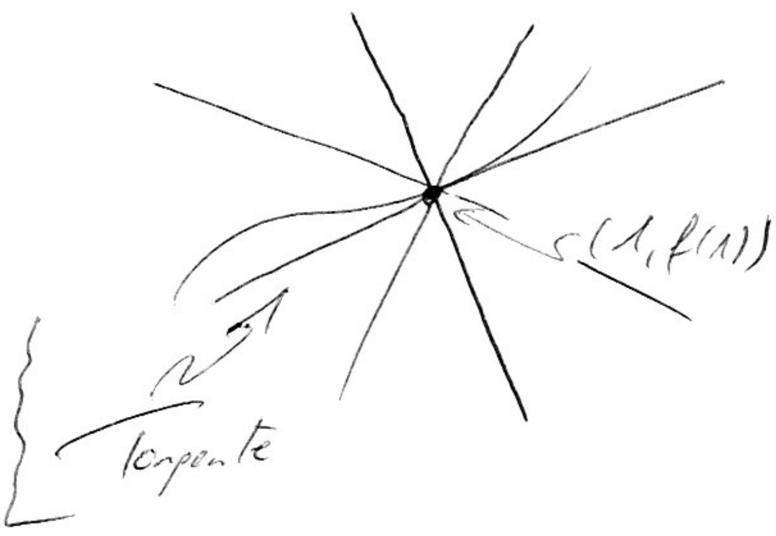
$$\frac{r_g(h)}{h} := \frac{f(1+h) - g(1+h)}{h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - c \cdot \frac{\cancel{1}+\cancel{h}-\cancel{1}}{\cancel{h}}$$

$$\to f'(1) - c = 0 \iff c = f'(1)$$

2.2 (b) (Fortsetzung)

Also geht der rel. Fehler $\frac{r_g(h)}{h} \to 0$, genau dann wenn $c = f'(1)$, also genau dann wenn g die Tangente f an (1) ist.

Eine Skizze des Geradenbüschels durch $(1, f(1))$ zeigt das ebenfalls.



2.3 (a) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall I und seien $a, b \in I$.

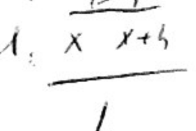
Dann gilt (1) $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist stetig differenzierbar und es gilt $F' = f$ (d.h. F ist Stammfunktion von f)

(2) $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$ für jede Stammfunktion G von f.

(b) Beweisskizze für (1): z.z. $F'(x) = f(x)$ $(\forall x \in I)$

Dazu berechnen wir den Differenzenquotienten

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

Symbolisch: 

$/\,h \approx \frac{f(x) \cdot h}{h} = f(x)$.

3] (a) $\frac{s(3)-s(2)}{3-2} = \frac{1}{2}\cdot 10 \cdot (3^2-2^2) = 5(9-4) = \underline{\underline{25}}$

Unterrichtssequenz

$\frac{s(3)-s(2,9)}{3-2} = \frac{1}{2} 10 (3^2-2,9^2) = 5\cdot 0,59 = \underline{\underline{29,5}}$

$2,9\cdot 2,9$
58
261
8,41

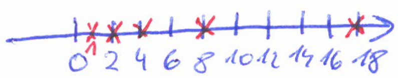
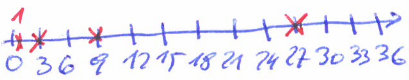
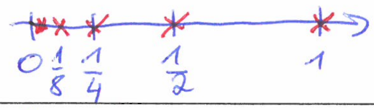
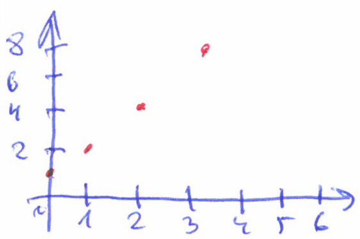
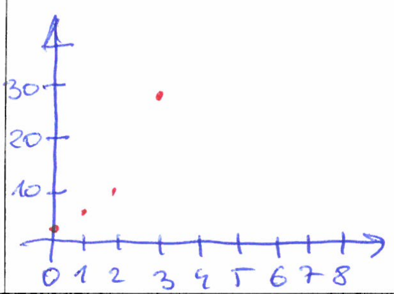
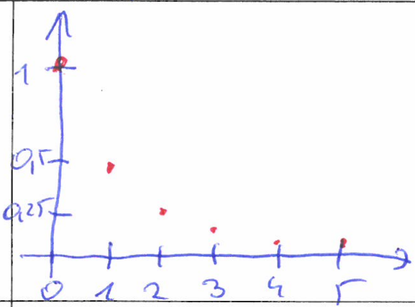
(b) Die Schülerinnen berechnen korrekt die Durchschnittsgeschwindigkeiten. Sie schaffen es dann aber nicht, das Konzept der Momentangeschwindigkeit als Limes der Durchschnittsgeschwindigkeiten für kleine Intervalle (mit einem Randpunkt 3) zu erkennen. Statt dessen versuchen sie die Formel für die Durchschnittsgeschw. auch im degenerierten Intervall [3,3] zu verwenden, was notwendigerweise auf den Ausdruck 0/0 führt.

(c) Liebe Antonia & Frida, glaubt ihr, dass der Ball tatsächlich stehen bleibt? Ist es nicht vielmehr so, dass der Ball sogar immer schneller wird? Ihr seid hier auf das formale Problem gestoßen, dass man die Momentangeschwindigkeit des Balls nicht als seine Durchschnittsgeschwindigkeit auf dem "kollabierten" Intervall [3,3] berechnen kann. Vielmehr ist die Momentangeschwindigkeit <u>festgelegt</u>, als der Grenzwert der Durchschnittsgeschw. bei immer kleineren Intervallen. Habt ihr eine Vermutung für den Wert im obigen Bsp?

Prinzip der Variation: Beim Lehren von Begriffen nach dem Prinzip der Variation sind genügend viele verschiedene Objekte vorzulegen, die das charakteristische Merkmal des Begriffs gemeinsam haben und das Wesentliche dieses Begriffs herauszuarbeiten. Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler zumindest zu zweit zusammenarbeiten, um ihre Entdeckungen auszutauschen. Mit Plakaten oder auch im Plenum sind abschließend die entdeckten Merkmale zu sammeln und von der Lehrperson gegebenenfalls zu ergänzen.

Aufgabenstellung: Gegeben sind die drei Zahlenfolgen <1, 2, 4, 8, ...>; <1, 3, 9, 27, ...> und $a_n = 0{,}5^n$.

- Stelle die drei Folgen auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem dar.
- Gib sowohl rekursive als auch explizite Darstellungen an.
- Beschreibe, wodurch sich zwei aufeinander folgende Glieder unterscheiden und vergleiche mit der rekursiven und expliziten Darstellung.

<1, 2, 4, 8, ...>	<1, 3, 9, 27, ...>	$a_n = 0{,}5^n$
		
		
Expl.: $a_n = 1 \cdot 2^n$ rek.: $a_{n+1} = a_n \cdot 2$	Expl.: $a_n = 1 \cdot 3^n$ rek.: $a_{n+1} = a_n \cdot 3$	Expl.: $a_n = 0{,}5^n$ rek.: $a_{n+1} = a_n \cdot 0{,}5$
Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist konstant 2 . Der Wert (2) findet sich in d. expl. + rek. Darstellung.	Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist konstant 3 Der Wert (3) findet sich in der expl. + rek. Darstellung.	Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist konstant 0,5 Der Wert (0,5) findet sich in der expl. + rek. Darstellung.

4.1 Zum Folgenbegriff

a) **1.1.2. Definition (Folge).** Sei M eine Menge. Eine *Folge* in M ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to M . \tag{D.1}$$

Meist werden wir den Fall $M = \mathbb{R}$ betrachten; man sagt dann, a ist eine *reelle Folge*.

b)

FdPw-Box 15: Iterationsaspekt bzw. Rekursionsaspekt des Folgenbegriffs

Jedes Folgenglied (außer dem ersten) wird sukzessive aus seinem Vorgänger (seinen Vorgängern) konstruiert.

FdPw-Box 16: Aufzählungsaspekt des Folgenbegriffs

Eine Folge wird als sukzessive Auflistung, Aneinanderreihung, Reihenfolge oder Aufzählung von Zahlen oder Objekten betrachtet.

FdPw-Box 17: Zuordnungsaspekt des Folgenbegriffs

Eine Folge ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl einen Funktionswert zuordnet.

Die Definition aus a) verwendet den Zuordnungsaspekt, da die Definition genau diesem Aspekt folgt.

c) Zur Einführung von Folgen bietet sich der Iterationsaspekt besonders an, weil damit Folgen zur rekursiven Modellierung diskreter Prozesse verwendet werden können. Diese Prozesse können außermathematisch sein und somit wird zur ersten Winter'schen Grunderfahrung (Erscheinungen der Welt in einer spezifischen Weise wahrnehmen) beigetragen.

4.2. Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

a)

Fachdidakt. Professionswissen. Box 2: Grundvorstellung

Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.

Fachdidakt. Professionswissen. Box 1: Aspekte math. Begriffe

Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist eine Facette dieses Begriffs, mit dem dieser *fachlich* beschrieben wird (werden kann).

Grundvorstellungen eines mathematischen Begriffs erlauben es, Aspekte eines mathematischen Begriffs mit Bedeutung zu versehen und so diese Aspekte in einen inhaltlichen Kontext zu setzen.

b)

Der dynamische Aspekt: Dem dynamischen Aspekt des Grenzwertbegriffs liegt die intuitive Vorstellung eines potenziell unendlichen Vorgangs zugrunde. Zunahme eines Medikamentenspiegels, Koffeingehalts, ... Für diese Folgen lässt sich ein Wert a angeben, dem sich die Folgenglieder mit wachsendem n beliebig nähern und in dessen Nähe fast alle Folgenglieder liegen.

Der statische Aspekt: Ausgangspunkt der statistischen Sichtweise ist nun ein fester Wert. Ausgehend von diesem festen Wert wird jetzt jenes Folgenglied gesucht, ab dem alle weiteren Folgenglieder in einer vorgegebenen Umgebung des Wertes liegen. Hier fließt also ganz entscheidend die formale Definition des Grenzwerts ein!

FdPw-Box 22: Annäherungsvorstellung

Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert oder ein Objekt liefert die Annäherungsvorstellung als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.

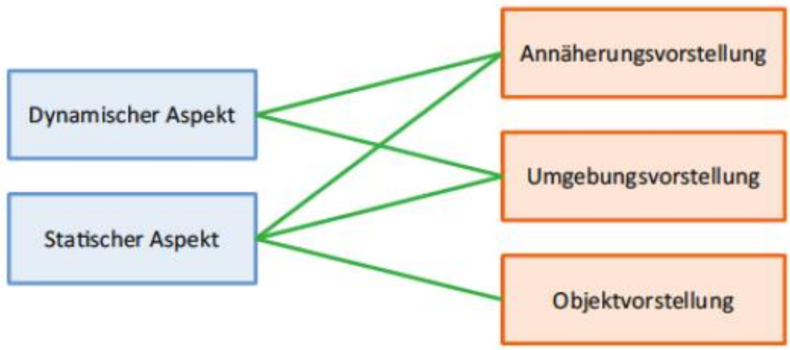
FdPw-Box 23: Umgebungsvorstellung

Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung.

FdPw-Box 24: Objektvorstellung

Grenzwerte werden als mathematische Objekte – etwa (feste) Werte, Matrizen oder geometrische Objekte – angesehen, die durch Folgen – etwa eine Zahlenfolge, eine Folge von Matrizen oder geometrischen Objekten – konstruiert oder definiert werden.

Die Objektvorstellung (die ja ganz wesentlich ist, um mit dem Begriff weiterzuarbeiten bzw. um auf ihn aufzubauen) kann nicht (nur schlecht) mit dem dynamischen Aspekt in Verbindung gebracht werden. Der statische Aspekt steht also nicht nur in enger Verbindung zur formalen Grenzwertdefinition, sondern er ermöglicht auch wesentlich die Weiterentwicklung der Theorie.



4.3 Schmiegegerade versus Tangente

fachmathematisch wird unterschieden zwischen Schmiegegerade und Tangente:

- Schmiegeggerade ist jene Gerade, die durch Sekanten über immer kleiner werdenden Intervalle approximiert wird
- Tangente ist die aus dem geometrischen Kontext (Kreis) kommenden Gerade, die die Kurve berührt und dort „die gleiche Richtung“ hat.

In der Schule wird beim Zugang zum Ableitungsbegriff oft der (geometrische) Tangentenbegriff benutzt, um die Steigung einer Kurve in einem Punkt zu untersuchen. Die Tangente wird dabei als Stützgerade aufgefasst und als Grenzlage von Sekanten betrachtet. Es folgt dann meist die Berechnung der Tangentensteigung mittels Grenzwert.
Der nötige Paradigmenwechsel vom (geometrischen) Tangentenbegriff zur Schmiegegerade (analytische Tangentenbegriff) wird meist nicht thematisiert.