Ausarbeitung

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

WS 2018/19, R. Steinbauer, E. Süss-Stepancik

3. Termin, 25.4.2019

GRUPPEN $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$[1]

1 Faktenwissen zur Schulmathematik Analysis

Kreuzen Sie für jede Antwortmöglichkeit an, ob Sie diese für richtig (R) oder falsch (F) bzw. zutreffend halten. (Je 1 Punkt pro richtiger Antwort.)

1.1. Es gibt injektive Funktionen, die nicht surjektiv sind. ~~(R)~~ (F)

1.2. Jede nach oben beschränkte und nicht leere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Supremum. ~~(R)~~ (F)

1.3. Die Folge $\langle 2, 4, 8, 16, \dots \rangle$ ist eine
. (1) arithmetische Folge ~~(2)~~ geometrische Folge.

1.4. Jede beschränkte (reelle) Folge konvergiert. (R) ~~(F)~~

1.5. Hat eine (reelle) Folge einen Häufungswert, dann konvergiert sie auch. (R) ~~(F)~~

1.6. Hat eine (reelle) Folge zwei verschiedene Häufungswerte, dann konvergiert sie nicht. ~~(R)~~ (F)

1.7. Welche der folgenden Schreibweisen für den Limes einer Folge ist korrekt:
$\lim_{n\to\infty} x_n \to a$ (J) ~~(N)~~
$x_n \to a \quad (n \to \infty)$ ~~(J)~~ (N)

1.8. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen der Wert $c \in \mathbb{R}$, falls
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \geq \delta \implies |f(x) - c| < \varepsilon.$ (R) ~~(F)~~

1.9. Rationale Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich differenzierbar. ~~(R)~~ (F)

1.10. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für jede Gerade g durch den Punkt $(0, f(0))$ gilt

$$r(h) := f(h) - g(h) \ \to \ 0 \quad (h \to 0).$$

~~(R)~~ (F)

[1] Diese Ausarbeitung folgt der Nummerierung der Gruppe A. Bei Gruppe B sind die Aufgaben permutiert.

1.11. Für jede Stammfunktion G der stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt \; + \; C$$

wobei C eine Konstante ist. (R) (F)

1.12. Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

eine stetig diffferenzierbare Funktion. (R) (F)

1.13. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls die Ober- und die Untersummen konvergieren. (R) (F)

1.14. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Der Ausdruck $\int_a^x f(x)\,dx$ ist sinnvoll. (R) (F)

1.15. Für eine (reelle) Folge gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad |x_n - a| < \varepsilon$ (R) (F)

1.16. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sicher) nicht differenzierbar, wenn

(a) ihr Graph einen Sprung hat. (R) (F)

(b) ihr Graph einen Knick hat. (R) (F)

1.17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert. (R) (F)

1.18. Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, \infty))$ ist stetig auf $[0, \infty)$. (R) (F)

2.1 (a) $G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(b) Der Graph besteht aus allen Punkten der Form $(a, f(a))$ ist also das kontinuierliche Analogon der Wertetabelle der Fkt.

(c) Eine Funktion ist ein Mengentripel $(A, B, G) =: f$ wobei A und B Definitions- & Zielmenge genannt werden und $G \subseteq A \times B$ Graph genannt wird und die Eigenschaften

(1) $\forall a \in A \; \exists b \in B: (a, b) \in G$

(2) $(a, b_1), (a, b_2) \in G \Rightarrow b_1 = b_2$

erfüllt

[oder verbal: (1) Jedes $a \in A$ kommt als erste Komponente eines Paares in G vor und (2) sind die ersten Einträge eines Paares gleich, so auch die zweiten]

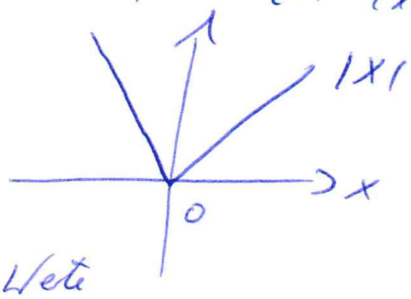
2.2 (a) Der Differenzenquotient von f bei x_0 ist der Ausdruck $(x \neq x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(b) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x^2 - 0}{x - 0} = x \longrightarrow 0 \; (x \to 0) \Rightarrow \underline{f'(x_0 = 0) = 0}$

(c) $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ <u>nicht</u> diffbar, denn der Differenzenquotient hat dort keinen Limes, genauer gilt $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \ (x>0) & \to 1 \\ -1 \ (x<0) & \to -1 \end{cases}$

Auf ganz $\mathbb{R}-\{0\}$ ist $f(x)=|x| = \begin{cases} x & (x>0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$ als Polynom diffbar mit $f'(x) = \begin{cases} -1 & (x<0) \\ 1 & (x>0) \end{cases}$.



Graphisch zeigt sich, dass der Graph bei $x_0=0$ einen Knick hat. Man sieht deutlich den Anstieg ± 1 für pos (neg) x-Werte sowie die Nicht-Diffbarkeit bei $x_0=0$.

2.3(a). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $a,b \in I$. Dann gilt

(1) Die Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

ist stetig differenzierbar und es gilt $F' = f$

(2) Sei F eine beliebige Stammfunktion von f, dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

(b) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall, dann heißt eine Fkt $F: I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f, falls $F' = f$ auf I gilt.

Sei F Stammfkt von $f \Rightarrow (F+C)' = F' + 0 = f$

und somit ist jedes $G = F + C$ (mit $C \in \mathbb{R}$) eine Stammfkt von f

3.1 (a): Ja $0,\overline{9}=1$

Summenformel geom. Reihe

(b) $$0,\overline{9} = 0+0,9+0,09+0,009+\dots$$
$$= 0,9\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\dots\right) = \frac{9}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$
$$= \frac{9}{10}\,\frac{10}{9} = 1$$

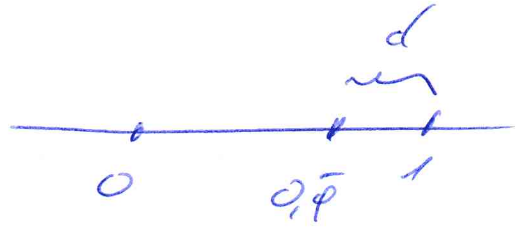
(c) Liebe Nina, deine Überlegungen treffen genau ins Schwarze und du hast den Kern der Sache erfasst: Jede endliche Zahl der Form 0,999...9 hat immer einen positiven Abstand zur Zahl 1. Allerdings ist die periodische Dezimalzahl $0,\overline{9}$ definiert als

$$0,\overline{9} = 0+0,9+0,09+0,009+\dots$$
$$= 0,9\left(1+\frac{1}{10}+\dots\right) = \frac{9}{10}\sum_{k=0}^{\infty}(1/10)^k.$$

Das bedeutet, dass $0,\overline{9}$ niemals abbricht, sondern als Limes der sog. Partialsummenfolge 0,9; 0,99; 0,999; usw definiert ist. Und dieser Limes ergibt (das kann man beweisen; siehe oben) 1. Also gilt in diesem Sinne tatsächlich $0,\overline{9}=1$.

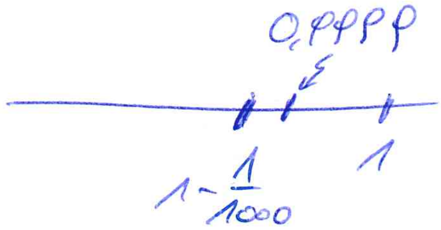
Wäre dem nämlich nicht so, also würde $0,\overline{9}<1$ gelten, ergeben sich schnell Widersprüchlichkeiten. Das kannst du ebenso so sehen: Angenommen $0,\overline{9}<1$, dann gilt

$1-0,\overline{9}=d$ mit $d>0$. Graphisch sieht das dann am Zahlenstrahl so aus:



Sagen wir etwa $d=\frac{1}{1000}$. Dann können wir aber eine Zahl der Form 0,99...9 finden die rechts von $1-\frac{1}{1000}$ liegt nämlich 0,9999. Tatsächlich gilt

$1-0,9999=0,0001=\frac{1}{10000}$, also



Wie du schon richtig erkannt hast, kann man dieses Spiel für jedes noch so kleine d spielen und immer noch eine Zahl der Form 0,99...9 finden, die rechts von 1-d liegt.

Jetzt ist es aber völlig absurd zu glauben, dass $0,\overline{9}$ links eines seiner endlichen Teilstücke 0,9...9 liegt und wir sind gezwungen $0,\overline{9}=1$ zu akzeptieren.

3.2(a) Den Definitionsbereich einer Fkt kann man so nicht bestimmen, der muss gegeben sein. Sinnvoll ist es lediglich etwa den maximalen Defbereich zu bestimmen; dieser ist $\mathbb{R}$ da x^2+4 auf ganz $\mathbb{R}$ positiv ist (also keine Nullstelle hat)

3.2 (b): (Mögliche Antwort) Bestimme den maximal möglichen (reellen) Definitionsbereich von $f(x) = {}^{-7}/_{x^2-4}$.

Damit wird erstens die Fallprobe der ursprünglichen Frage vermieden und zweitens abgefragt, ob die Schüler/innen erkennen, dass die Nullstellen des Nenners ausschließen müssen. Diese müssen tatsächlich berechnet werden ($x^2=4$, $x=\pm 2$) was aber leicht zu machen ist.

4.1 Grundvorstellungen

(a) Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.
(b)

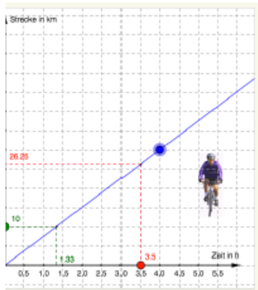
FdPw-Box 6: Zuordnungsvorstellung zum Funktionsbegriff

Eine Funktion ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zu.

Zuordnungsvorstellung zielt auf den Kern des Funktionsbegriffs (jedem Element der Definitionsmenge wird genau ein Element der Zielmenge zugeordnet) ab.

Zeit	Temp in°C
0	86
1	79
2	73
3	67
4	62
5	58
6	54
7	51

Abb. C.8: Zuordnungsvorstellung und Wertetabelle.



: Zuordnungscharakter — Quel-
/www.realmath.de/Neues/Klasse6/-
:/fahrrad.html

FdPw-Box 7: Kovariationsvorstellung zum Funktionsbegriff

Mit Funktionen wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird.

Hier steht das „Miteinander-Variieren“ der beiden Größen im Zentrum.

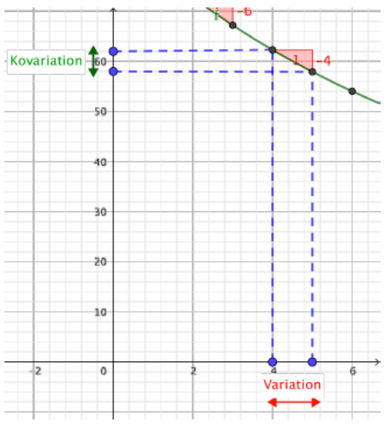


Abb. C.12: Kovariationsvorstellung — Graph

Variation

Zeit in min	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperatur in °C	86	79	73	67	62	58	54	51	48

Kovariation

FdPw-Box 8: Objektvorstellung zum Funktionsbegriff

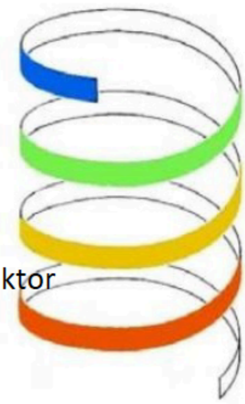
Eine Funktion ist ein einziges Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt.

Funktionen werden schließlich als Objekte betrachtet, denen Eigenschaften (Monotonie, Stetigkeit, ...) zugeschrieben werden können.

(c) Eine der vier Grundvorstellungen zur Differenzialrechnung zielt auf die lokale Änderungsrate ab.

Zu einer umfassend ausgeprägten Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate gehört die Entwicklung

- der Vorstellung von der Momentangeschwindigkeit bei Veränderungsprozessen (z. B. Bewegungsvorgängen),
- der Vorstellung von der Steigung einer Kurve in einem Punkt,
- der Vorstellung, dass die Änderung der Abhängigen y durch $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ gegeben ist.



- … eine GV, die nicht erst bei der Differenzialrechnung berücksichtigt wird!
  - bereits in der 9. und 10. Schulstufe anbahnen
  - Schülerinnen und Schüler bringen dann zur Diff.-Rechnung vielfältige Erfahrungen zur Beschreibung von Änderungsprozessen mit.
- Lehrplan AHS (6. Klasse – Kompetenzmodul 3):
  - Änderungen von Größen durch Änderungsmaße beschreiben können (absolute und relative Änderung, mittlere Änderungsrate, Änderungsfaktor
- Lehrplan AHS (7. Klasse):
  - Den Differenzenquotienten (die mittlere Änderungsrate) und den Differentialquotienten (die lokale bzw. momentane Änderungsrate) definieren können“

Änderungsmaße und Schulbücher (6. Klasse AHS)

Definition

Für eine reelle Funktion f, die auf dem Intervall [a; b] definiert ist, werden Änderungsmaße wie folgt festgelegt.

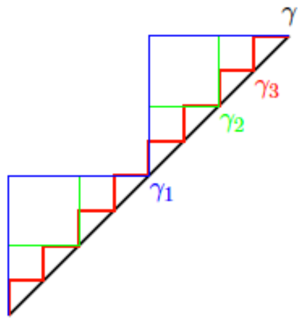
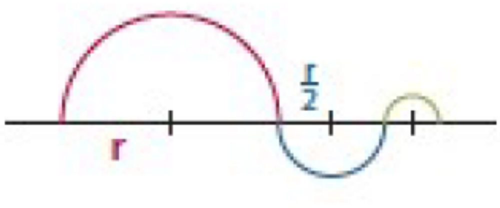
(1)	$f(b) - f(a)$	**Absolute Änderung** von f im Intervall [a; b]
(2)	$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	**Mittlere Änderung(srate)** von f im Intervall [a; b] Differenzenquotient im Intervall [a; b]
(3)	$\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$	**Relative Änderung** von f im Intervall [a; b]
(4)	$\frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \cdot 100$	**Prozentuelle Änderung** von f im Intervall [a; b]
(5)	$\frac{f(b)}{f(a)}$	**Änderungsfaktor** von f im Intervall [a; b] Der Änderungsfaktor ist jene reelle Zahl, mit der f(a) multipliziert werden muss, um f(b) zu erhalten.

Dimensionen Mathematik 6 (2018), Bleier et al., S. 150

- **SRP-Konzept im Abschnitt AN1 Änderungsmaße:**
  - AN-R 1.1 Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können
  - AN-R 1.2 Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane" Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können
  - AN-R 1.3 Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können

4.2 Grenzwert-Präzisierung

Die Präzisierung des Grenzwertbegriffs ist unerlässlich, um den Begriff genau zu erfassen. Es gibt nämlich zahlreiche Beispiele, die aufzeigen, wie eng die Grenzen eines intuitiven Verständnisses des Grenzwertbegriffs tatsächlich sind. Folgende zwei Beispiele verdeutlichen dies:

Treppenstufe – Treppenfolge	**Halbkreisbögen**
Treppenstufen: Die „Treppenfolge" nähert sich optisch der Diagonale des Einheits-Quadrats beliebig an: Die „späten" Treppen bleiben sogar als ganzes beliebig nahe an der Diagonalen. Trotzdem ist die Gesamtlänge jeder Treppe immer 2, aber die Länge der Diagonale gleich $\sqrt{2}$.	Analog gilt für die in den Einheitskreis eingeschriebenen Halbkreisbögen, dass die Summe der Umfänge der Halbkreisbögen mit gleichem Radius immer konstant gleich π ist, aber die Länge der Sehne gleich 2.
 Abb. D.21: Die Länge der Treppen ist konstant 2, die Länge der Diagonale aber $\sqrt{2}$.	 Abb. D.22: Die Summe der Längen der Halbkreisbögen ist π, aber die Länge der Sehne ist 2.

4.3 Ableitungsregel für zusammengesetzte Funktionen im Unterricht erarbeiten

(a) Erkunden des Phänomens: Schülerinnen und Schüler lernen vor der Formulierung von Sätzen (Ableitungsregeln) konkrete Beispiele kennen und können an diesen das Phänomen entdecken.

Es soll eine Regel für die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion $f(x) = g(x) + h(x)$ gefunden werden, falls die Ableitungen von g und h bekannt sind.

Aufgabe 1

Gegeben: $g(x) = 0{,}25 \cdot x^2$ und $h(x) = 0{,}5 \cdot x$ (siehe Figur 1).

a) Der Funktionsterm von $f(x) = g(x) + h(x)$

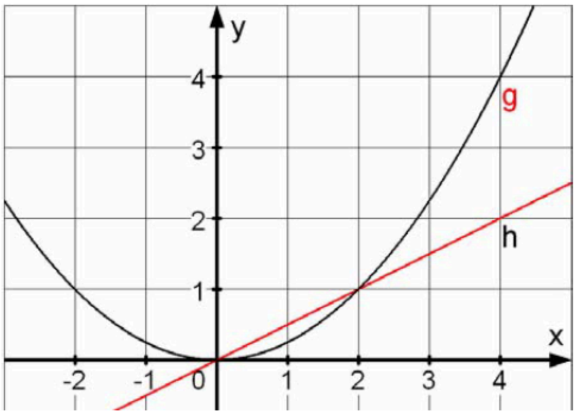
lautet: $f(x) = \ldots\ldots$

Zeichnen Sie den Graph von f in Figur 1 ein (evtl. mit Hilfe des GTR).

b) Hier wird untersucht, wie sich das Plus-Zeichen im Funktionsterm $g(x) + h(x)$ auf die Ableitung von f auswirkt.

Dazu werden zwei verschiedene Zugänge verglichen:

Figur 1



1. Zugang	**2. Zugang**
Bestimme g'(x) und h'(x) mit den schon bekannten Regeln. Berechne g'(0), g'(2), g'(4). Berechne h'(0), h'(2), h'(4). Berechne g'(0) + h'(0); g'(2) + h'(2); g'(4) + h'(4)	Zeichne mit Technologie die Funktionen g, h und f. Ermittle mittels Tangentensteigung an der Stelle x = 0; x = 2 und x = 4 den Wert von f'.

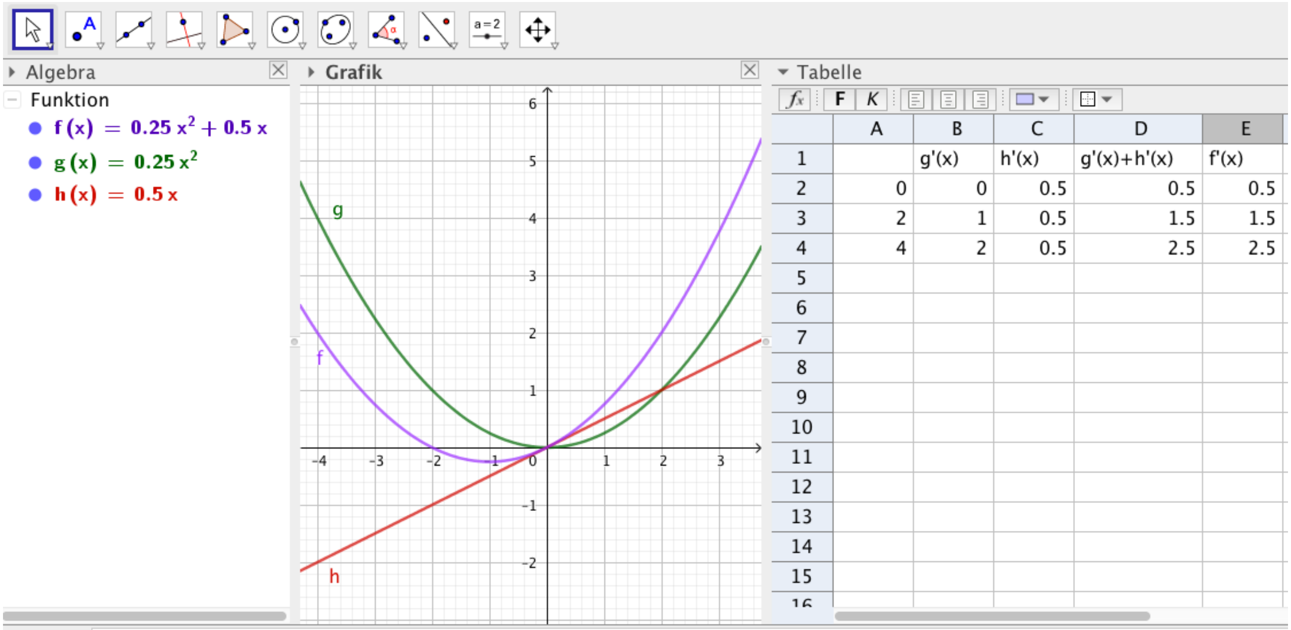
Trage die berechneten und mit Technologie ermittelten Werte in die nachstehende Tabelle ein:

x	**0**	**2**	**4**
g'(x) berechnet			
h'(x) berechnet			
g'(x) + h'(x) berechnet			
f'(x) mittels Tangentensteigung ermittelt			

Entscheidend ist, dass zwei „einfache“ Funktionen g und h zusammengesetzt werden zur Funktion f = g + h. Für g und h werden an ausgesuchten Stellen x_i die Werte $g'(x_i)$ und $h'(x_i)$ ermittelt sowie deren Summe gebildet. Diese Summe wird mit den entsprechenden Werten von $f'(x_i)$ verglichen.

(b) Herausarbeiten einer Vermutung: Ausgehend von den konkreten Beispielen formulieren die Schülerinnen und Schüler eine allgemeine Vermutung.

Ausgehend von der Tabelle oberhalb kann eine Vermutung für die Ableitungsregel aufgestellt werden. Beispielsweise:



Es zeigt sich also, dass für zusammengesetzte Funktionen f = g + h an ausgewählten Stellen gilt: f' = g' + h'. Diese Beobachtung lässt sich nun auch als Vermutung formulieren.
Vermutung:
Sind die Ableitungen g´ von g und h´ von h bekannt, dann ist die Ableitung der Summe f(x) = g(x) + h(x) von g und h: f'(x) = g'(x) + h'(x).

(c) Beweis der Vermutung: Des Öfteren muss für den Beweis der Vermutung noch weiteres Vorwissen zur Verfügung gestellt werden und die Beweisbedürftigkeit bzw. Beweisnotwendigkeit der Vermutung erst „erzeugt“ werden.
Ein Beweis kann beispielsweise mittels Differenzialquotienten geführt werden.