Ausarbeitung

Prüfung zu
Schulmathematik Analysis
WS 2018/19, R. Steinbauer, E. Süss-Stepancik
4. Termin, 26.6.2019
GRUPPE $\boxed{\text{A}}$

1 Faktenwissen zur Schulmathematik Analysis

Kreuzen Sie für jede Antwortmöglichkeit an, ob Sie diese für richtig (R) oder falsch (F) bzw. zutreffend halten. (Je 1 Punkt pro richtiger Antwort.)

1.1. Es gibt bijektive Funktionen, die nicht injektiv sind. (R) (F)

1.2. Hat eine (reelle) Folge genau einen Häufungswert, dann konvergiert sie schon. (R) (F)

1.3. Wenn eine (reelle) Folge nicht konvergiert, dann ist sie unbeschränkt. (R) (F)

1.4. Was gilt? — Setzen Sie für beide Richtungen jeweils den korrekten Pfeil $\Rightarrow$ oder $\not\Rightarrow$, sowie $\Leftarrow$ oder $\not\Leftarrow$ ein!

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert} \quad \begin{matrix} \Longrightarrow \\ \cancel{\cdots\cdots} \end{matrix} \quad a_n \to 0$$

1.5. Liegen fast alle Glieder der (reellen) Folge (x_n) in jeder ε-Umgebung von a, dann ist a Grenzwert der Folge (x_n). (R) (F)

1.6. Jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. (R) (F)

1.7. Für die Tangente t an eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt 0 gilt

$$\frac{r(h)}{h} := \frac{f(h) - t(h)}{h} \to 0 \quad (h \to 0).$$

(R) (F)

1.8. Für je zwei beliebige Stammfunktionen F und G der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $F(x) - G(x) = C$ wobei C eine Konstante ist. (R) (F)

1.9. Eine gültige Schreibweise für die erste Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x)\, dx = f(x).$$

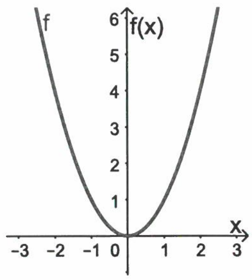
(R) (F)

12

1.10. Welche Eigenschaften haben die gegebenen Funktionen auf dem jeweiligen Definitions- und Zielbereich? Kreuzen Sie an!

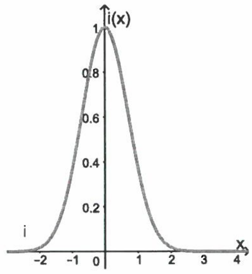
(a) $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$

injektiv	☐ ja	☒ nein
surjektiv	☒ ja	☐ nein



(b) $i\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $i(x) = \exp(-x^2)$

injektiv	☐ ja	☒ nein
surjektiv	☐ ja	☒ nein



1.11. Jede nach oben beschränkte Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Supremum. (R) (F)

1.12. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig. (R) (F)

1.13. Eine streng monoton wachsende differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat überall eine positive Ableitung. (R) (F)

1.14. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ kann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden und ist dort auch differenzierbar. (R) (F)

1.15. Welche Implikationen gelten für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? — Setzen Sie für beide Richtungen jeweils den korrekten Pfeil $\Rightarrow$ oder $\not\Rightarrow$, sowie $\Leftarrow$ oder $\not\Leftarrow$ ein!

$$f'(x_0) = 0 \quad \underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow} \quad x_0 \text{ ist lokale Extremstelle von } f$$

12

2.1. (a) Eine reelle Folge ist eine Abbildung $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

(b) Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert/Limes der Folge $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N: |x_n - a| < \varepsilon$

2.2 (a) (Hauptsatz Diff-Int) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Fkt auf dem Intervall I und sei $a \in I$. Dann ist die Fkt $F: I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

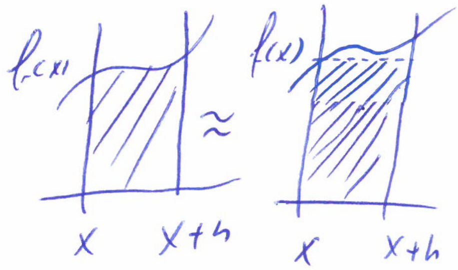
stetig differenzierbar und es gilt $F' = f$ (d.h. F ist Stammfkt von f.)

Beweisskizze: Wir berechnen F' auf I:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_0^{x+h} f(t)\,dt - \int_0^{x} f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

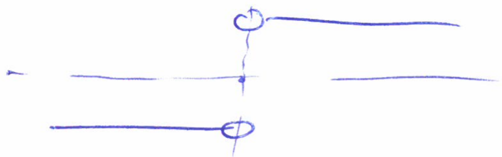
$$\approx \frac{f(x)\cdot h}{h} = f(x)$$

Näherungsweise gilt, dass die Fläche unter dem Graphen von f von x nach $x+h$ für kleine h ca. der Fläche des Rechtecks mit Breite h und Länge $f(x)$ entspricht; siehe Skizze



2.3 (a) $f(x)=1$, $f(x)=x$, Polynom, sin, cos, Exp etc

(b) zB die Vorzeichenfkt $\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$



2.4 (a) Für den Grenzwert gilt, dass fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder in jeder Umgebung liegen; bei einem Häufungswert sind es nur unendlich viele.

Oder etwas salopper: Der GW hat die Eigenschaft, dass die Folge schließlich in jeder Umgebung bleibt, beim HW kommt sie immer wieder in jede Umgebung

(b) 2 HW: $(-1)^n$, 1 HW, nicht konv: $x_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

3

3.1 (a) Die Fkt $f(x)=|x|$ $(x\in\mathbb{R})$ ist diffbar in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und nicht diffbar in $x_0=0$. Es gilt $|x|' = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$

In $x_0=0$ existiert der Differentialquotient nicht.

(b) Zunächst ist unklar, wie Nila diese Aussage meint, d.h. was sie genau mit „Grenzwert" meint.

- Meint sie damit die einseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten, also $\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{|x|}{x}$ und $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{|x|}{x}$ dann hat sie recht, denn sie gibt eine korrekte Erklärung für die Nichtexistenz des Differentialq.

- Meint sie hingegen die einseitigen Grenzwerte der Ableitungsfunktion, also $\lim\limits_{x\nearrow 0}|x|' = \lim\limits_{x\nearrow 0} -1 = -1$ bzw $\lim\limits_{x\searrow 0}|x|' = \lim\limits_{x\searrow 0} 1 = 1$ so ist ihre Argumentation (zumindest ohne Zusatzüberlegungen) nicht schlüssig. Daraus folgt nämlich zunächst nur, dass die Ableitung $|x|'$ (falls sie denn existiert) bei $x_0=0$ nicht stetig sein kann.

Vorschlag für Lehrerinnenäußerung

Aha, das kommt darauf an, wie du das meinst... Schauen wir uns mal die Definition des Differentialq. an.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

Was kommt hier heraus wenn du nur positive bzw nur negative x einsetzt?

Hast du das so gemeint?

Ja, sehr gut bzw Nein, dann lass uns genauer schauen (siehe oben)

3.1(c): Lehrerinnenintervention: Hm, da müssen wir aufpassen & die Sache ganz genau anschauen. Am besten ist es, hier ganz explizit hinzuschreiben wie $|x|$ definiert ist. Wie ihr wahrscheinlich noch wisst gilt $|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x \leq 0. \end{cases}$

Wenn wir nun im obigen Ausdruck $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ nur positive bzw nur negative x einsetzt was kommt dann raus? [Verweis auf Bild]

Das bedeutet also, dass der Limes garnicht existiert ist. Also ist $|x|$ bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Evtl. Hier gibt es aber noch die folgende Subtilität: Die Tatsache, dass die Werte der Ableitungsfkt $f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ bei $x_0 = 0$ nicht zusammenpassen ist nicht das entscheidende Argument. Es besagt ja nur, dass die Ableitung, falls sie in $x_0 = 0$ existieren würde nicht stetig wäre.

3.2. Prinzip des Kontrasts

In der Erarbeitungsphase eines mathematischen Begriffs kann das Prinzip des Kontrasts zum Einsatz kommen.

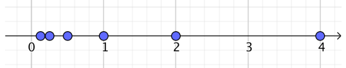
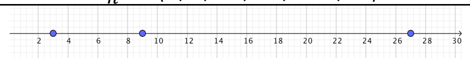
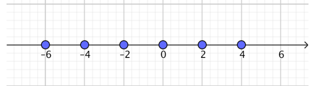
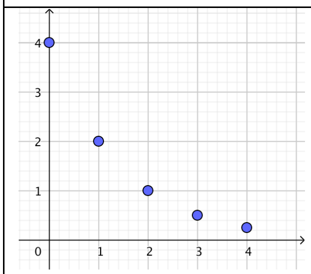
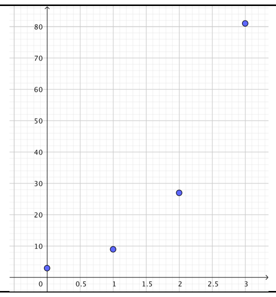
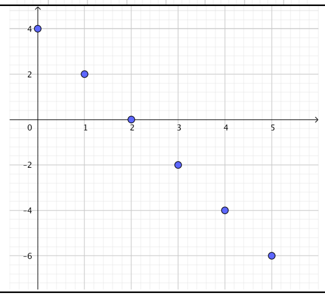
Beim Lehren von Begriffen gemäß dem Prinzip des Kontrasts sind ausreichend viele Objekte vorzulegen, bei denen das charakteristische Merkmal – das im Fokus stehen soll – gegeben bzw. eben nicht gegeben ist. Zum Begriff, der erarbeitet werden soll, sind also geeignete Beispiele und Gegenbeispiele (Kontrastmaterial) vorzulegen. Die Gegenbeispiele sollen sich hierbei vom zu erarbeitenden Begriff nur in einem wesentlichen Merkmal unterscheiden.

Aufgabenstellung nach dem Prinzip des Kontrasts zur Erarbeitung der geometrischen Folge:

Gegeben sind die drei Zahlenfolgen $a_n = \langle 4; 2; 1; 0{,}5; 0{,}25; 0{,}125; \dots \rangle$, $b_n = \langle 3, 9, 27, 81, 243, \dots \rangle$ und $c_n = \langle 4,\ 2, 0, -2, -4, -6, -8, \dots \rangle$.

- Stelle die drei Folgen auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem dar.
- Gib sowohl rekursive als auch explizite Darstellungen an.
- Beschreibe, wodurch sich zwei aufeinander folgende Glieder unterscheiden und vergleiche mit der rekursiven und expliziten Darstellung.
- Worin bestehen die Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede der drei Folgen?

Lösungserwartung:

$a_n = \langle 4; 2; 1; 0{,}5; 0{,}25; 0{,}125; \dots \rangle$	$b_n = \langle 3, 9, 27, 81, 243, \dots \rangle$	$c_n = \langle 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, \dots \rangle$
		
		
$a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n ; n = 0, 1, 2, \dots$	$b_n = 3 \cdot 3^n; n = 0, 1, 2, \dots$	$c_n = 4 - 2n; n = 0, 1, 2, \dots$
$a_1 = 4;\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2}$	$b_1 = 3;\ b_{n+1} = b_n \cdot 3$	$c_1 = 4;\ c_{n+1} = c_n - 2$
Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist ½.	Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist 3.	Die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist -2.
Der Wert ½ und 3 findet sich sowohl in der expliziten als auch rekursiven Darstellung.		Der Wert findet sich ebenfalls sowohl in der rekursiven als expliziten Darstellung.
2-dimensionale Darstellung und explizite Darstellung deuten auf eine Exponentialfunktion hin		2-dimensionale Darstellung und explizite Darstellung deuten auf eine lineare Funktion hin; es handelt sich um eine arithmetische Folge

4.1. Aspekte des Funktionsbegriffs

(a) Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist eine Facette dieses Begriffs, mit dem dieser fachlich beschrieben wird (werden kann).

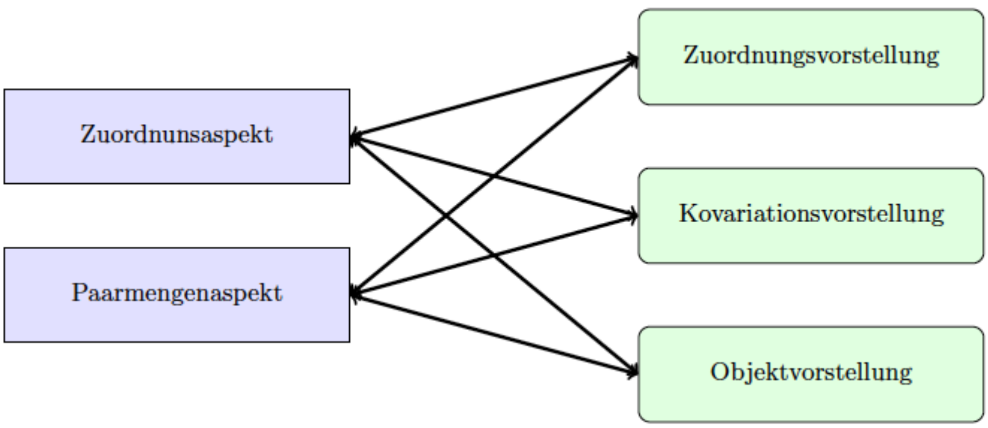
Ein Aspekt ist ein fachinhaltlicher Begriff. Die Aspekte eines Begriffs sind durch mathematische Fakten gegeben, sie bilden den Kern seiner fachlichen Definition oder Charakterisierung.
Dazu im Gegensatz sind Grundvorstellungen ein Konzept fachdidaktischer Art.

Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.

Die Beziehung zwischen Grundvorstellungen und Aspekten ist nun die folgende: Grundvorstellungen erlauben es, Aspekte eines mathematischen Begriffs mit Bedeutung zu versehen und so in einen sinnhaltigen Kontext zu setzen. Das wiederum ist eine Voraussetzung für ein verständnisvolles Hantieren mit dem Begriff.
Grundvorstellungen entwickeln sich, wenn Lernende sich mit Phänomenen befassen, durch die Aspekte des Begriffs erfahrbar werden. Dabei können verschiedene Grundvorstellungen zu einem Aspekt entwickelt werden, aber auch eine Grundvorstellung verschiedene Aspekte des Begriffs berühren.

(a) **Zuordnungsvorstellung:** Eine Funktion ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zu.
Kovariationsvorstellung: Mit Funktionen wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird.
Objektvorstellung: Eine Funktion ist ein einziges Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt.

Zuordnungsaspekt: Eine Funktion ist eine Zuordnung zwischen den Elementen zweier Mengen A und B, wobei jedem Element von A genau ein Element von B zugeordnet wird.
Paarmengenaspekt: Eine Funktion ist gegeben durch Teilmenge G des kartesischen Produkts zweier Mengen A und B mit der Eigenschaft, dass für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert, sodass $(a; b) \in G$.



4.2. Schmiegegerade versus Tangente

fachmathematisch wird unterschieden zwischen Schmiegegerade und Tangente:

- Schmiegeggerade ist jene Gerade, die durch Sekanten über immer kleiner werdenden Intervalle approximiert wird
- Tangente ist die aus dem geometrischen Kontext (Kreis) kommenden Gerade, die die Kurve berührt und dort „die gleiche Richtung“ hat.

In der Schule wird beim Zugang zum Ableitungsbegriff oft der (geometrische) Tangentenbegriff benutzt, um die Steigung einer Kurve in einem Punkt zu untersuchen. Die Tangente wird dabei als Stützgerade aufgefasst und als Grenzlage von Sekanten betrachtet. Es folgt dann meist die Berechnung der Tangentensteigung mittels Grenzwert. Der nötige Paradigmenwechsel vom (geometrischen) Tangentenbegriff zur Schmiegegerade (analytische Tangentenbegriff) wird meist nicht thematisiert.

4.3. Grunderfahrungen

Grunderfahrungen beschreiben ...

(G1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen (mathematischer Blick),

(G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen (mathematische Welt),

(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, zu erwerben (heuristische Fähigkeiten).