Ausarbeitung

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

WS 2018/19, R. Steinbauer, E. Süss-Stepancik

5. Termin, 19.12.2019

GRUPPEN $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$[1]

1 Faktenwissen zur Schulmathematik Analysis

Kreuzen Sie für jede Antwortmöglichkeit an, ob Sie diese für richtig (R) oder falsch (F) bzw. zutreffend halten. (Je 1 Punkt pro richtiger Antwort.)

1.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sicher) unstetig, wenn

- (a) ihr Graph einen Knick hat. (R) (F)
- (b) sie ihr Monotonieverhalten sprunghaft ändert. (R) (F)

1.2. Jede nach oben beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ hat

- (a) eine obere Schranke. (R) (F)
- (b) hat ein Supremum. (R) (F)

1.3. Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

- (a) f stetig $\Rightarrow f$ differenzierbar (R) (F)
- (b) f differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig (R) (F)

1.4. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls $a_k \to 0$. (R) (F)

1.5. Eine gültige Schreibweise für die erste Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x).$$

(R) (F)

[1]Diese Ausarbeitung folgt der Nummerierung der Gruppe A. Bei Gruppe B sind die Aufgaben permutiert.

1.6. Die Folge $a_n = \frac{-1}{n}$ $(n \geq 1)$ ist

(a) monoton wachsend (R) (F)

(b) beschränkt (R) (F)

1.7. Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungswert. (R) (F)

1.8. Eine streng monoton wachsende differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat überall eine positive Ableitung. (R) (F)

1.9. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sicher) nicht differenzierbar, wenn

(a) ihr Graph einen Sprung hat. (R) (F)

(b) ihr Graph einen Knick hat. (R) (F)

1.10. Auch eine (reelle) Folge mit zwei verschiedenen Häufungswerten kann konvergieren. (R) (F)

1.11. Liegen unendlich viele Glieder der (reellen) Folge (x_n) in jeder ε-Umgebung von a, dann ist a Grenzwert der Folge (x_n). (R) (F)

1.12. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Der Ausdruck $\int_a^b f(t)\,dt$ ist eine (1) Funktion (2) Zahl.

1.13. Die Betragsfunktion $|x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist differenzierbar auf $(0, \infty)$. (R) (F)

1.14. Die Folge $a_n = \frac{1+2n}{2(n+n^2)}$ ist eine Nullfolge . (R) (F)

1.15. Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt. (R) (F)

$\boxed{2.1}$ (a) f heißt diff'bar in $x_0 \in \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ existiert & endlich ist.

(b) • Für $x_0 > 0$ gilt $\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \frac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ $(h \to 0)$

Also gilt $\forall x > 0$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

• Für $x_0 = 0$ gilt $\frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \to \infty$ $(h \to 0)$

Daher ist $\sqrt{x}$ in $x=0$ nicht diff'bar.

2.2 $x_{n+1} = \frac{1}{3} x_n + 2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad x_0 = 1$

$= : r x_n + d$ (einfacher mit allg. Notation)

Daher
$$x_1 = \tfrac{1}{3} x_0 + 2 = r x_0 + d$$
$$x_2 = r x_1 + d = r^2 x_0 + d(1+r)$$
$$x_3 = r x_2 + d = r^3 x_0 + d(1+r+r^2)$$
$$\vdots$$
$$\underline{\underline{x_n}} = r^n x_0 + d(1+r+r^2+\dots+r^{n-1})$$
$$= r^n x_0 + d \frac{1-r^n}{1-r} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \frac{1-(1/3)^n}{1-1/3}$$

endl. geom. Reihe

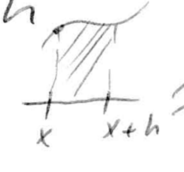
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n (1-3) + 3 = \underline{\underline{3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$$

Also gilt $\underline{\underline{x_5}} = 3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^5 = 3 - 2 \frac{1}{243} = \frac{729-2}{243} = \underline{\underline{\frac{727}{243}}}$

2.3 Hauptsatz, 1. Teil: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in I$, I ein Intervall. Dann ist
$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$
stetig differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$, (d.h. F ist eine Stammfkt von f).

Beweisskizze: ZZ $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$. Wir berechnen den Differenzenquotienten
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

symbolisch

$= \frac{1}{h}$  $\approx \frac{1}{h} \cdot h f(x) = f(x)$

3.1 Grundvorstellung 2 – Änderungsverhalten/Kovariation bzw. Kovariationsvorstellung

Diese Grundvorstellung wird in der Literatur wie folgt beschrieben:

> „*Mit Funktionen wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird*.“ (Greefrath et al., 2016)

Es geht als um das „Miteinander-Variieren“ der beiden Größen. Beispielsweise nimmt der Umfang eines Kreises mit wachsendem Radius zu, die Funktion ist also monoton wachsend. Umgekehrt verhält es sich etwa beim Abkühlen des Tees.

Aus der

(1) **Perspektive der Definitionsmenge:** Variiert wird a ∈ A. Wie verhält sich dann die ”abhängige Variable“ b = f(a)?

(2) **Perspektive der Zielmenge:** Betrachtet wird die die ”abhängige Variable“ b = f(a). Wie muss sich a ∈ A verändern, dass sich b = f(a) in einer bestimmten Weise verhält, z. B. einen bestimmten Wert erreicht, oder einen oder Extremwert annimmt?

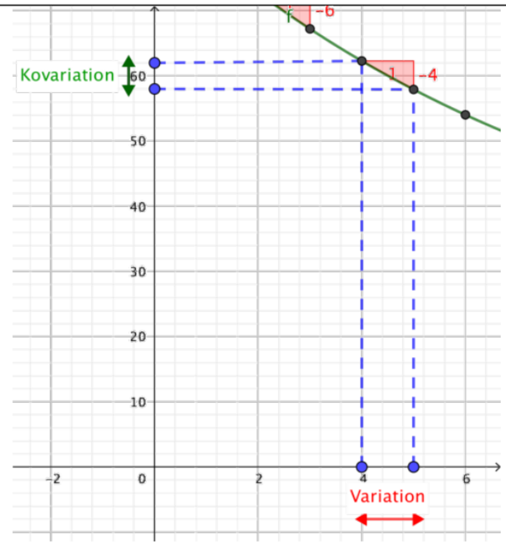
Kovariation – sichtbar an Tabelle und Graph

Variation

Zeit in min	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperatur in °C	86	79	73	67	62	58	54	51	48

Kovariation

Das Entscheidende beim Kovariationsaspekt ist, dass es nicht mehr genügt, einzelne Wertepaare zu betrachten. Denn es müssen jeweils mehrere benachbarte Werte zueinander in Beziehung gesetzt werden. Bei der Kovariationsvorstellung wird also der Blick darauf gerichtet, wie die Änderung von x mit der Änderung von y zusammenhängt. Hierbei wird also die Werttabelle (wenn sie senkrecht angeschrieben ist) in vertikaler Richtung betrachtet.



Der Kovariationsaspekt bzw. das Änderungsverhalten spielt bei der Erarbeitung der Differenzierbarkeit eine wichtige Rolle, denn gerade dort wird die Veränderung der Funktionswerte bei Veränderung der Argumente studiert.

Auch beim Zugang zur Differentialrechnung über die Momentangeschwindigkeit nütz diese Vorstellung bzw. diesen Aspekt. Da dort (Aufgabe – Geschwindigkeit) die Veränderung des zurückgelegten Weges in unterschiedlichen gleichlangen/nicht gleich langen Zeitintervallen betrachtet wird (vgl. Grundvorstellung von Funktionen – Kovariation). Dies zeigt sich grafischen an anlogen Abbildungen zu oben.

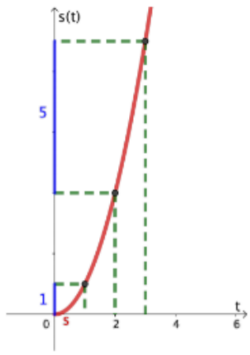


Abb. E.10: Zurückgelegter Weg

3.2 (a): Ja $0,\bar{9}=1$

Summenformel geom. Reihe

(b) $0,\bar{9} = 0+0,9+0,09+0,009+\ldots$

$$= 0,9\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots\right) = \frac{9}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{9}{10}\,\frac{10}{9} = 1$$

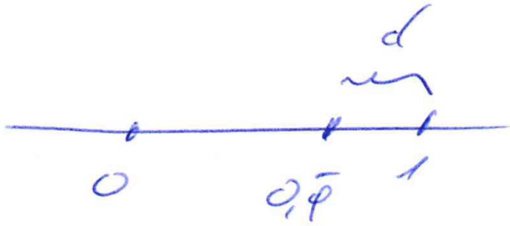
(c) Liebe Nina, deine Überlegungen treffen genau ins Schwarze und du hast den Kern der Sache erfasst: Jede endliche Zahl der Form $0,999\ldots9$ hat immer einen positiven Abstand zur Zahl 1. Allerdings ist die periodische Dezimalzahl $0,\bar{9}$ definiert als

$$0,\bar{9} = 0+0,9+0,09+0,009+\ldots$$
$$= 0,9\left(1+\frac{1}{10}+\ldots\right) = \frac{9}{10}\sum_{k=0}^{\infty}(1/10)^k$$

Das bedeutet, dass $0,\bar{9}$ niemals abbricht, sondern als Limes der sog. Partialsummenfolge $0,9;\ 0,99;\ 0,999;$ usw definiert ist. Und dieser Limes ergibt (das kann man beweisen; siehe oben) 1. Also gilt in diesem Sinne tatsächlich $0,\bar{9}=1$.

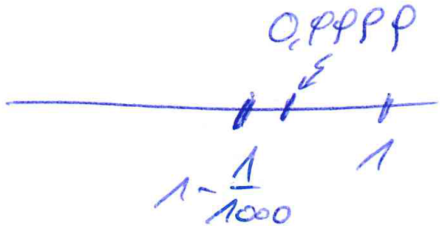
Wäre dem nämlich nicht so, also würde $0,\bar{9}<1$ gelten, ergeben sich schnell Widersprüchlichkeiten. Das kannst du etwa so sehen: Angenommen $0,\bar{9}<1$, dann gilt

$1-0,\overline{9} = d$ mit $d>0$. Graphisch sieht das dann am Zahlenstrahl so aus:



Sagen wir etwa $d=\frac{1}{1000}$. Dann können wir aber eine Zahl der Form $0,99\ldots9$ finden die rechts von $1-\frac{1}{1000}$ liegt nämlich $0,9999$. Tatsächlich gilt

$1-0,9999=0,0001=\frac{1}{10000}$, also



Wie du schon richtig erkannt hast, kann man dieses Spiel für jedes noch so kleine d spielen und immer noch eine Zahl der Form $0,99\ldots9$ finden, die rechts von $1-d$ liegt.

Jetzt ist es aber völlig absurd zu glauben, dass $0,\overline{9}$ links eines seiner endlichen Teilstücke $0,9\ldots9$ liegt und wir sind gezwungen $0,\overline{9}=1$ zu akzeptieren.

3.3 Prinzip des Kontrasts

In der Erarbeitungsphase eines mathematischen Begriffs kann das Prinzip des Kontrasts zum Einsatz kommen.

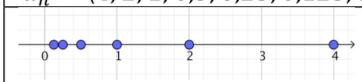
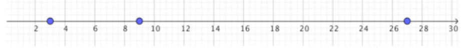
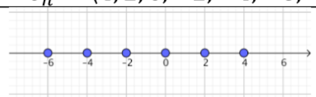
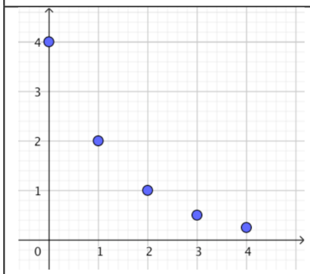
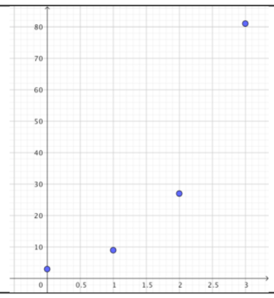
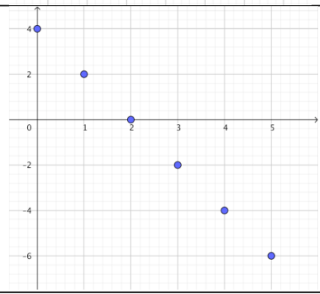
Beim Lehren von Begriffen gemäß dem Prinzip des Kontrasts sind ausreichend viele Objekte vorzulegen, bei denen das charakteristische Merkmal – das im Fokus stehen soll – gegeben bzw. eben nicht gegeben ist. Zum Begriff, der erarbeitet werden soll, sind also geeignete Beispiele und Gegenbeispiele (Kontrastmaterial) vorzulegen. Die Gegenbeispiele sollen sich hierbei vom zu erarbeitenden Begriff nur in einem wesentlichen Merkmal unterscheiden.

Aufgabenstellung nach dem Prinzip des Kontrasts zur Erarbeitung der geometrischen Folge:

Gegeben sind die drei Zahlenfolgen $a_n = \langle 4; 2; 1; 0{,}5; 0{,}25; 0{,}125; \dots \rangle$, $b_n = \langle 3, 9, 27, 81, 243, \dots \rangle$ und $c_n = \langle 4,\ 2, 0, -2, -4, -6, -8, \dots \rangle$.

- Stelle die drei Folgen auf der Zahlengeraden und im Koordinatensystem dar.
- Gib sowohl rekursive als auch explizite Darstellungen an.
- Beschreibe, wodurch sich zwei aufeinander folgende Glieder unterscheiden und vergleiche mit der rekursiven und expliziten Darstellung.
- Worin bestehen die Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede der drei Folgen?

Lösungserwartung:

$a_n = \langle 4; 2; 1; 0{,}5; 0{,}25; 0{,}125; \dots \rangle$	$b_n = \langle 3, 9, 27, 81, 243, \dots \rangle$	$c_n = \langle 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, \dots \rangle$
		
		
$a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n; n = 0, 1, 2, \dots$	$b_n = 3 \cdot 3^n; n = 0, 1, 2, \dots$	$c_n = 4 - 2n; n = 0, 1, 2, \dots$
$a_1 = 4;\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2}$	$b_1 = 3;\ b_{n+1} = b_n \cdot 3$	$c_1 = 4;\ c_{n+1} = c_n - 2$
Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist ½.	Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist 3.	Die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist -2.
Der Wert ½ und 3 findet sich sowohl in der expliziten als auch rekursiven Darstellung.		Der Wert findet sich ebenfalls sowohl in der rekursiven als expliziten Darstellung.
2-dimensionale Darstellung und explizite Darstellung deuten auf eine Exponentialfunktion hin		2-dimensionale Darstellung und explizite Darstellung deuten auf eine lineare Funktion hin; es handelt sich um eine arithmetische Folge

4.1 Grundvorstellungen

(a) Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist eine Facette dieses Begriffs, mit dem dieser fachlich beschrieben wird (werden kann).

Ein Aspekt ist ein fachinhaltlicher Begriff. Die Aspekte eines Begriffs sind durch mathematische Fakten gegeben, sie bilden den Kern seiner fachlichen Definition oder Charakterisierung.
Dazu im Gegensatz sind Grundvorstellungen ein Konzept fachdidaktischer Art.

Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.

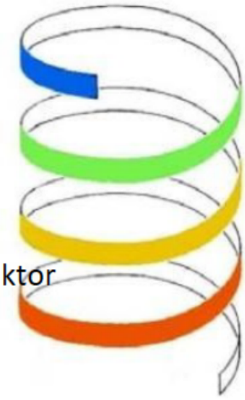
Die Beziehung zwischen Grundvorstellungen und Aspekten ist nun die folgende: Grundvorstellungen erlauben es, Aspekte eines mathematischen Begriffs mit Bedeutung zu versehen und so in einen sinnhaltigen Kontext zu setzen. Das wiederum ist eine Voraussetzung für ein verständnisvolles Hantieren mit dem Begriff.
Grundvorstellungen entwickeln sich, wenn Lernende sich mit Phänomenen befassen, durch die Aspekte des Begriffs erfahrbar werden. Dabei können verschiedene Grundvorstellungen zu einem Aspekt entwickelt werden, aber auch eine Grundvorstellung verschiedene Aspekte des Begriffs berühren.

(b) Eine der vier Grundvorstellungen zur Differenzialrechnung zielt auf die lokale Änderungsrate ab.

Zu einer umfassend ausgeprägten Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate gehört die Entwicklung

- der Vorstellung von der Momentangeschwindigkeit bei Veränderungsprozessen (z. B. Bewegungsvorgängen),
- der Vorstellung von der Steigung einer Kurve in einem Punkt,
- der Vorstellung, dass die Änderung der Abhängigen y durch $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ gegeben ist.

- … eine GV, die nicht erst bei der Differenzialrechnung berücksichtigt wird!
  - bereits in der 9. und 10. Schulstufe anbahnen
  - Schülerinnen und Schüler bringen dann zur Diff.-Rechnung vielfältige Erfahrungen zur Beschreibung von Änderungsprozessen mit.
- Lehrplan AHS (6. Klasse – Kompetenzmodul 3):
  - Änderungen von Größen durch Änderungsmaße beschreiben können (absolute und relative Änderung, mittlere Änderungsrate, Änderungsfaktor
- Lehrplan AHS (7. Klasse):
  - Den Differenzenquotienten (die mittlere Änderungsrate) und den Differentialquotienten (die lokale bzw. momentane Änderungsrate) definieren können“



4.2. Schmiegegerade versus Tangente

fachmathematisch wird unterschieden zwischen Schmiegegerade und Tangente:

- Schmiegeggerade ist jene Gerade, die durch Sekanten über immer kleiner werdenden Intervalle approximiert wird
- Tangente ist die aus dem geometrischen Kontext (Kreis) kommenden Gerade, die die Kurve berührt und dort „die gleiche Richtung“ hat.

In der Schule wird beim Zugang zum Ableitungsbegriff oft der (geometrische) Tangentenbegriff benutzt, um die Steigung einer Kurve in einem Punkt zu untersuchen. Die Tangente wird dabei als Stützgerade aufgefasst und als Grenzlage von Sekanten betrachtet. Es folgt dann meist die Berechnung der Tangentensteigung mittels Grenzwert. Der nötige Paradigmenwechsel vom (geometrischen) Tangentenbegriff zur Schmiegegerade (analytische Tangentenbegriff) wird meist nicht thematisiert.

4.3. Grunderfahrungen

Grunderfahrungen beschreiben ...

(G1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen (mathematischer Blick),

(G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen (mathematische Welt),

(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, zu erwerben (heuristische Fähigkeiten).