Blatt 6: Folgen & Vermischtes

$\boxed{27}$ **Zum Infimum.**

(a) Formulieren Sie eine Definition des Infimums einer Teilmenge M von $\mathbb{R}$.

(b) Geben Sie eine möglichst anschauliche Erklärung, was $\inf(M)$ ist.

(c) Kommentieren Sie die folgende Aussage und belegen Sie sie mit Beispielen: „Supremum und Infimum beschränkter Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ sind der immer verfügbare Ersatz für das nur allzu häufig fehlende Maximum und Minumum."

$\boxed{28}$ **Supremum, Maximum, Infimum, Minimum.** Stellen Sie die Beispiele D.1.3.18 und D.1.3.20, graphisch dar, d.h. falls existent, stellen Sie Supremum, Maximum, Infimum bzw. Minimum von $\mathbb{N}$, $(0,1]$, $[0,1]$ und $(1/n)_{n\geq 1}$ graphisch dar. Erfinden Sie zwei weitere Aufgaben, eine leicht und eine schwierige.

$\boxed{29}$ **Umformungen: Stil und Fallen.** Kommentieren Sie die folgenden Beweise. Sind sie korrekt? Sind die behaupteten Aussagen korrekt? Stellen Sie gegebenenfalls die Aussage richtig und beweisen Sie diese *in gutem Stil*.

(a) Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 - 3n - 4 > n^2 - 4n$.
Beweis:

$$\begin{aligned} n^2 - 3n - 4 &> n^2 - 4n \\ (n+1)(n-4) &> n(n-4) \\ n+1 &> n \qquad \text{w.A.} \end{aligned}$$

(b) Behauptung: Für $n \geq 1$ gilt $1 - n^2 \geq n(n-1)$
Beweis:

$$\begin{aligned} 1 - n^2 &\geq n(n-1) \qquad |^2 \\ \cancel{1} - 2n^2 + \cancel{n^4} &\geq n^2(n^2 - 2n + 1) \;=\; n^4 - 2n^3 + n^2 \geq \cancel{n^4} - 2n^3 + \cancel{1} \quad \text{weil } n^2 \geq 1 \\ -2n^2 &\geq -2n^3 \\ n^2 &\leq n^3 \\ 1 &\leq n \qquad \text{w.A.} \end{aligned}$$

$\boxed{30}$ **Heron-Verfahren explizit.** Berechnen Sie mittels des Heron-Verfahrens
(a) $\sqrt{30}$ und (b) $\sqrt{17}$
auf 20 Nachkommastellen genau. Verwenden Sie dazu Technologie!

$\boxed{31}$ **Heron reloaded.** Implementieren Sie das Heron-Verfahren z.B. mit Geogebra (oder einem Werkzeug Ihrer Wahl) und berechenen Sie für
(a) $\sqrt{99}$ und (b) $\sqrt{313}$ (c) $\sqrt{4711}$
für $n \leq 15$ nicht nur die Näherung x_n sondern auch explizit den Rest r_n und den Fehler z_n. Wie wirkt sich der gewählte Startwert x_1 auf den Approximationsprozess aus?