Blatt 7: Folgen & Konvergenz

32 Grenzwert vorweggenommen. Durchforsten Sie Abschnitt D§1 der Vorlesung und finden Sie alle Stellen an denen ihrer Meinung nach der Grenzwertbegriff in der Luft liegt, soll heißen in natürlicher Weise auftritt oder zumindest zum Greifen nahe ist. Geben Sie entsprechende Begründungen.

33 Gute und schlechte Verbalisierungen der Grenzwertdefinition. Im Unterricht ist es von fundamentaler Bedeutung — mit der formalen Grenzwertdefinition im Kopf — gute von weniger guten Verbalisierungen unterscheiden und sich guter bedienen zu können.
Beurteilen Sie vor diesem Hintergrund die folgenden Sprechweisen, die den Sachverhalt $\frac{1}{n} \to 0$ ausdrücken (sollen).

(1) $\frac{1}{n}$ strebt für n gegen ∞ gegen 0.

(2) $\frac{1}{n}$ ist schließlich beliebig nahe bei 0.

(3) $\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 beliebig nahe.

(4) $\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 immer näher.

(5) $\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 immer näher, ohne sie je zu erreichen.

34 Grenzwertdefinitionen in Schulbüchern[2]. Die folgenden fünf Formulierungen zur Definition des Grenzwerts einer Folge wurden Schulbüchern entnommen.

(1) (STEINER und WEILHARTER 2006, S. 7):
Die Zahl α heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε-Umgebung von α fast alle Glieder der Folge liegen: $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt für fast alle Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$.

(2) (BÜRGER 2004, S. 152):
Ist $\langle a_n | n \in \mathbb{N} \rangle$ eine reelle Zahlenfolge, dann heißt die reelle Zahl a Grenzwert der Zahlenfolge, wenn folgendes gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - a| < \varepsilon$
Man schreibt: $\lim_{\to\infty} a_n = a$

(3) (THORWARTL et al. 2005, S. 82):
Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε-Umgebung $U(a;\varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ fast alle Glieder der Folge liegen. Es gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
Anders ausgedrückt: Die Folge $\langle a_n \rangle$ strebt mit wachsendem n dem Grenzwert (limes) a zu. Man schreibt: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt konvergente Folge.
Anmerkung: $\lim a_n = a$ bedeutet nicht, dass a tatsächlich „erreicht“ wird, sondern nur, dass in jeder auch noch so kleinen ε-Umgebung um a fast alle Glieder der Folge liegen.

(4) (SCHÄRF 1971, S. 24):
Eine Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ heißt konvergent gegen den Grenzwert a, wenn folgendes gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine (von ε abhängige) Nummer N, so daß für alle $n > N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.
Man schreibt: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und liest: a ist Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ für n gegen Unendlich.
Jede Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

(5) (BRAND et al. 2013, S. 62): Wenn für jeden (beliebig kleinen, positiven) Abstand ε ab einem (entsprechend großen) n der Betrag $|a_n - a| < \varepsilon$ bleibt, so heißt a Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$. Wir schreiben dann: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (Sprich: „Der Limes von a_n für n gegen unendlich ist a.“) Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, andernfalls divergent.

[2] Diese Aufgabe stammt aus der Diplomarbeit von Lukas Bäcker.

Ihre Aufgabe ist nun die folgende:

(a) Definitionen analysieren und vergleichen.
Analysieren Sie die fünf gegebenen Definitionen einerseits nach deren mathematischen Exaktheit und andererseits danach, wie schülergerecht diese formuliert sind!

(b) Ranking erstellen.
Versetzen Sie sich in die Situation, eine Definition für Ihren Schulunterricht zum Grenzwertbegriff festlegen zu müssen. Erstellen Sie gemäß Ihrer in (1) gemachten Beobachtungen ein (subjektives) Ranking der fünf Formulierungen! Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung!

$\boxed{\textbf{35}}$ **Grenzwerte berechnen, 1.** Betrachten Sie nochmals die Folgen aus Aufgabe $\boxed{16}$:

(a) $a_n = (-1)^n$ („Vorzeichenmaschine")

(b) $b_n = \dfrac{n}{n+1}$

(c) $c_n = \dfrac{n^k}{2^n}$ für ein fixes $k \in \mathbb{N}$.

(d) $d_n = \dfrac{n!}{2^n}$

(e) $e_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(f) Die Fibonacci-Folge: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ $(n \geq 2)$

Welcher dieser Folgen sind konvergent, welche divergent? Im Falle der Konvergenz berechnen Sie den Limes (gerne mit Technologieeinsatz) und argumentieren/beweisen Sie analytisch die entsprechenden Konvergenzen.

$\boxed{\textbf{36}}$ **Grenzwerte berechnen, 2.** Bestimmen Sie, falls vorhanden, die Grenzwerte der Folgen aus Aufgabe $\boxed{17}$ (gerne mit Technologieeinsatz):

$$a_n = \sqrt{n + 10^3} - \sqrt{n}, \qquad b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{10^3}} - \sqrt{n} \qquad (n \geq 1).$$

Was kann man aus dieser Aufgabe in Kombination mit Aufgabe $\boxed{17}$ lernen?